

I seria zadań z matematyki IIA

17 lutego 2004 r.

Zadanie 1.

Obliczyć całki:

a) $\int \frac{(x^3-1)^2}{x} dx$

b) $\int \frac{8-x\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{3^{3x}+1}{3^x+1} dx$

c) $\int \frac{2 dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

d) $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$

e) $\int \operatorname{tgh}^2 x dx$

Zadanie 2.

Wykorzystując całkowanie przez podstawienie i przez części, obliczyć całki ($a \neq 0$):

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+5}}$

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

c) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$

d) $\int x^2 \arcsin x dx$

e) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

f) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

h) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

i) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

j) $\int x\sqrt{x^4 + x^2 + 1} dx$

k) $\int \arcsin \frac{x}{a} dx$

l) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx$

Zadanie 3.

Wykorzystując całkowanie przez części, wyprowadzić wzory rekurencyjne ($n = 1, 2, \dots$):

a) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

b) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$

c) $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$

d) $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$

e) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$