X seria zadań z matematyki IIA
10 maja 2004 r.

Zadanie 1
Znajdź ekstrema globalne funkcji :
$a)$ $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$
w trójkącie domkniętym, ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.
$b)$ $f(x,y) = x + y$ w kole domkniętym $x^2 + y^2 \leq 1$
$c)$ $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$, $x \in [0,\pi], y \in [0,\pi]$
$d)$ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $x \in [0,2], y \in [0,2]$

Zadanie 2
Wykaż, że równanie Laplace'a :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

nie zmienia postaci przy dowolnej zamianie zmiennych :

$$x = \phi(u,v) \quad y = \psi(u,v)$$

takiej, że spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

Zadanie 3
Przekształć następujące równanie różniczkowe wprowadzając nowe zmienne:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\zeta = x, \quad \eta = y - x, \quad \theta = z - x$$

Zadanie 4
Wyraź następujące pochodne cząstkowe :

$$\frac{\partial \tilde{f}(r,\phi)}{\partial \phi}; \quad \frac{\partial \tilde{f}(r,\phi)}{\partial r}$$

przez pochodne funkcji :

$$f(x,y) = \tilde{f}(r,\phi) \quad \text{gdzie} \quad x = a \cdot r\cos(\phi), y = b \cdot r\sin\phi)$$

a,b- dowolne stałe

Zadanie 5
Zbadaj ekstrema funkcji $y(x)$ zadanych w sposób uwikłany równaniami:

$$a) x^2 - 2xy - 3y^2 - 4 = 0$$

$$b) x^2y^3 + y - 3 = 0$$

Zadanie 6
Równanie $g(x,y,z) = 0$ zadaje w sposób uwikłany funkcje $X(y,z)$,$Y(x,z)$,$Z(x,y)$.
Udowodnij, że:

$$\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$