XI seria zadań z matematyki IIA

18 maja 2004 r.

Zadanie 1.

a) Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y)=x^3+y^3$ przy warunku $x+y-2=0$.
b) Wśród prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej S znaleźć prostopadłościan, którego objętość jest największa.
c) Wśród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć trójkąt, dla którego bryła obrotowa powstała przez jego obrót dokoła jednego z boków ma największą objętość.

Zadanie 2.

a) Współrzędne sferoidy wydłużonej (η,θ,φ), gdzie $0\le\eta<\infty$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi<2\pi$, są zdefiniowane wzorami: $x=a\sinh\eta\,\sin\theta\cos\varphi$, $y=a\sinh\eta\,\sin\theta\sin\varphi$, $z=a\cosh\eta\,\cos\theta$, gdzie a=const >0. Obliczyć jakobian przekształcenia (odwzorowania) $(\eta,\theta,\varphi)\to(x,y,z)$ i wykazać, że jest ono lokalnie odwracalne poza punktami na osi z. Znaleźć przekształcenie odwrotne.
b) Wykazać, że przekształcenie $(u,v,w)\to(x,y,z)$, gdzie $x=u+v-w+3$, $y=2u-v+w+2$, $z=u+2v+w+1$ jest odwracalne i znaleźć przekształcenie odwrotne do niego.

Zadanie 3.

Przy użyciu metody rozdzielenia zmiennych (i ewentualnie odpowiedniego podstawienia) rozwiązać następujące równania różniczkowe:
a) $(1+x^2)y'=\sqrt{1-y^2}$,
b) $y'=e^{x+y}$,
c) $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$,
d) $xy'=y\ln y-y\ln x$,
e) $y'=\cos(x-y)$,
f) $y'=\frac{1}{x+y}$.

Zadanie 4.

Przy użyciu metody uzmienniania stałej znaleźć rozwiązania następujących równań różniczkowych liniowych:
a) $y'=2-\frac{y}{x}$,
b) $y'=-y\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$,
c) $y'=\frac{y}{\sin x}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$,
d) $y'=\frac{x(a-y)}{1-x^2}$,
e) $(1-x^2)y'=a-xy$,
f) $y'=y(x^2-\ln y)$ (podstawić $z=\ln y$).