Matematyka II A, Seria XII (podana 25 maja 2004)

Zadanie 1: Rozwiązać następujący zestaw równań różniczkowych, każde z warunkiem początkowym $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} a) \qquad \frac{d}{dx}\,y &= 5y + 10\,, \\ b) \qquad \frac{d}{dx}\,y &= 5y + 10x\,, \\ c) \qquad \frac{d}{dx}\,y &= 5xy + 10\,, \\ d) \qquad \frac{d}{dx}\,y &= 5xy + 10x\,. \end{aligned}$$

Zadanie 2: Rozwiązać następujący układ równań roóżniczkowych z warunkami początkowymi $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$ (K. Maurin, *Analiza, Część I, Elementy*, PWN 1976, str. 255):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3\,, \\ \frac{d}{dt}x_2 &= x_2 + x_3\,, \\ \frac{d}{dt}x_3 &= 2x_3\,. \end{aligned}$$

Zadanie 3: Rozwiązać następujące równania różniczkowe (*ibid.*, str. 263):

$$\begin{aligned} a) \qquad \frac{d^2}{dt^2}x + a^2x &= 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,, \\ b) \qquad \frac{d^2}{dt^2}x - a^2x &= 0; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0\,, \\ c) \qquad \frac{d^2}{dt^2}x + 2b\frac{d}{dt}\,x + a^2x &= 0; \quad b > 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,. \end{aligned}$$

W punkcie c) rozpatrzyć osobno przypadki $b < a$, $b = a$, i $b > a$. Narysować wykresy $x(t)$.

Zadanie 4: Podać ogólne rozwiązania równań (*ibid.*, str. 269):

$$\begin{aligned} a) \qquad \frac{d^2}{dt^2}x + a^2 &= A\sin bt\,; \quad a = b \quad albo \quad a \neq b\,, \\ b) \qquad \frac{d^2}{dt^2}x + 2d\frac{d}{dt}\,x + a^2x &= A\sin bt\,; \quad 0 < d < a\,. \end{aligned}$$

W równaniu c) rozpatrzyć osobno przypadki $b < a$, $b = a$, i $b > a$. Narysować wykresy $x(t)$.

Zadanie 5: Podać ogólne rozwiązanie równania

$$i\,\frac{d}{dt}\xi = \frac{1}{2}\,\vec{a}\,\vec{\sigma}\,\xi$$

na wektor

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix},$$

zakładając, że wektor $\vec{a}$ nie zależy od czasu. Narysować wykresy funkcji $\alpha(t)$ i $\beta(t)$, gdy $\alpha(0) = 1$ i $\beta(0) = 0$. Wektor $\vec{\sigma}$ jest zbudowany z macierzy 2×2 (macierzy Pauliego)

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$