Matematyka II A, Seria 2 (podana 23 lutego 2004)

Zadanie 1: Obliczyć następującą całkę jako granicę ciągu sum, gdy liczba odcinków w podziale obszaru całkowania na jednakowe części rośnie do nieskończoności, i porównać otrzymaną granicę z wynikiem otrzymanym za pomocą funkcji pierwotnej:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos\phi \, d\phi \,.$$

Zadanie 2: Obliczyć całki:
a) $\int_a^b (x+2)^\mu$, dla $\mu \neq -1$ i $\mu = -1$,
b) $\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, \cos m\varphi \, d\varphi$, dla $m = n$ i dla $m \neq n$ (wsk.: wzór Eulera),
c) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$.

Zadanie 3: Używając wzoru $\int_1^4 dx/x = \ln 4$ i sum całkowych, wykazać, że:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} \ln 4 \,.$$

Zadanie 4: Korzystając z zasad całkowania przez części, obliczyć całki:
a) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$,
b) $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$.

Zadanie 5:
Wykorzystując podstawienie $x = \pi - t$, obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{a^2 + \cos^2 x} \, dx \,.$$