IV seria zadań z matematyki IIA
8 marca 2004 r.

Zadanie 1
Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$$

$$d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+2}}\qquad e)\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{2n}\qquad g)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$$

Zadanie 2
Zbadaj zbieżność i znajdź sumę następujących szeregów:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n}$$

Zadanie 3
Zamień ułamki dziesiętne na ułamki zwykłe:

$$a) 0,(45)\quad 0,2(16)$$

Zadanie 4
Pokaż, że z własności metryki:

$$\begin{array}{lrcl} a) & d(x,y) & = & 0 \text{ wtw. gdy } x=y \\ b) & d(x,y) & = & d(y,x) \\ c) & d(x,y) & \leq & d(x,z)+d(z,y) \end{array}$$

wynika jej dodatnia określoność $d(x,y)\geq 0$.
Zadanie 5
Sprawdź, czy

$$d(x,y)=\begin{cases} |x_2-y_2| & \text{dla } x_1=y_1 \\ |x_2|+|y_2|+|x_1-y_1| & \text{dla } x_1\neq y_1 \end{cases}$$

określa metrykę w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Narysuj kulę o środku w punkcie $p=(1,1)$ i promieniu $R=2$, i odcinek $[p,q]$ gdzie $p=(1,1)$, $q=(-1,-1)$