V seria zadań z matematyki IIA

1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną następujących ciągów funkcyjnych

   (a) $f_n = x + \frac{e^{-nx}}{n}$

   (b) $f_n = \frac{x}{1+n^2x^2}$

   (c) $f_n = \frac{nx}{n^3+x^2}$

2. Wyznaczyć funkcję graniczną dla ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ zadanego na $\mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = nx \sin \frac{x}{n}$$

   Zbadać charakter tej zbieżności na zbiorach $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ oraz na przedziałach postaci $[0, a]$, gdzie $a > 0$.

3. Pokazać, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$$

   jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, \infty)$.

4. Zbadać zbieżność szeregów funkcyjnych

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$

5. Funkcja f jest określona na $\mathbb{R}$ wzorem: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i obliczyć $\int_0^{\infty} f(x)dx$.

6. Wyznaczyć promień zbieżności szeregów funkcyjnych

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2x^{2n}}{(2n)!}$