VI seria zadań z matematyki IIA
23 marca 2004 r.

Zadanie 1.
a) Wykazać, że wektory

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne.
b) Wykazać, że wektory

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ są liniowo zależne i przedstawić wektor v_3 w postaci kombinacji liniowej wektorów v_1 i v_2.

Zadanie 2.
Znaleźć macierz przekształcenia liniowego A, które wektory v_1, v_2, v_3 przeprowadza w wektory v_1', v_2', v_3', gdzie:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3.
a) Wyznaczyć Aw, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Wyznaczyć A' i w' w nowej bazie $\{v_1',\, v_2',\, v_3'\}$ zdefiniowanej w zadaniu 2. Obliczyć $A'w'$ i porównać z $(Aw)'$.

Zadanie 4.
W przestrzeni wektorowej wielomianów $w(x)$ stopnia ≤ 3 znaleźć postać operatora $\frac{d}{dx}$ w bazie potęgowej $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ i w bazie wielomianów Legendre'a $\{\,1,\, x,\, \frac{1}{2}(3x^2-1),\, \frac{1}{2}(5x^3-3x)\}$.

Zadanie 5.
Wyznaczyć wartości własne i wektory własne następujących macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \; b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.
W przestrzeni unitarnej wielomianów $w(x)$ stopnia ≤ 3 dla $x \in [0, \infty)$ z iloczynem skalarnym $(v|w) = \int_0^\infty \bar{v}(x) w(x) e^{-x} dx$ znaleźć bazę ortonormalną przez ortonormalizację bazy potęgowej $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$.
Komentarz: Porównać otrzymane wielomiany ortonormalne z wielomianami Laguerre'a zdefiniowanymi wzorem Rodriguesa $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$.