Matematyka II A, Seria VII (podana 5 kwietnia 2004)

Uwaga do Serii VI: w zadaniu 6 powinno być $(v|w) = \int_0^\infty e^{-x}\bar{v}(x)w(x)dx$.

Zadanie 1: Macierz operatora w R^2 ma w pewnej bazie ortonormalnej postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{1}$$

Zdiagonalizować ten operator, tzn. znaleźć wartości własne λ_1 i λ_2 i odpowiadające im wektory własne, i sprawdzić, że wektory własne tworzą bazę. Następnie zortonormalizować tę bazę i znaleźć macierz przejścia B do tej bazy z wyjściowej bazy ortonormalnej. Pokazać jawnym rachunkiem, że

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 2: To samo zadanie dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 3: Stosując metodę Lagrange'a sprowadzić do postaci diagonalnej formy

$$\begin{array}{cc} a) & x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_2x_3 + 3x_3^2 \,, \\ b) & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1^2 + x_3^2 \,, \\ c) & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \,, \end{array}$$

i podać ich sygnatury.

Zadanie 4: Za pomocą przekształcenia ortogonalnego sprowadzić do postaci kanonicznej formy

$$\begin{array}{cc} a) & x_1x_2 \,, \\ b) & x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \,, \\ c) & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \,, \\ d) & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \,, \\ e) & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \,, \end{array}$$

i określić ich sygnatury.