Drugie kolokwium z matematyki IIA
22 maja 2004 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i komentarzy wpłynie na obniżenie oceny.

Zadanie 1.
W trójwymiarowej przestrzeni wektorowej przekształcenie liniowe A i wektor w są w bazie kanonicznej określone wzorami:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć te wielkości (A' i w') w nowej bazie złożonej z wektorów:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Porównać $A'w'$ i $(Aw)'$.

Zadanie 2.
W kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie dany jest twór geometryczny o równaniu

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 10x - 20y + 5 = 0.$$

Przez odpowiedni obrót i przesunięcie początku układu współrzędnych sprowadzić to równanie do postaci kanonicznej i sklasyfikować ten twór.

Zadanie 3.
Wyznaczyć maksymalną dziedzinę D funkcji rzeczywistej $f(x, y) = (x + y)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ i wyznaczyć ekstrema lokalne tej funkcji wewnątrz D.
(Maksymalna dziedzina funkcji rzeczywistej to maksymalny zbiór wartości jej argumentów, w którym funkcja przyjmuje wartości rzeczywiste).

Zadanie 4.
Wyznaczyć ekstrema funkcji $y = y(x)$ określonej wzorem $y^3 + x^2 - 2y^2 - 4x - y + 6 = 0$.

Zadanie 5.
a) Znaleźć postać równania falowego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

po przejściu od zmiennych $(x,\, t)$ do nowych zmiennych $(\xi,\, \eta)$ zdefiniowanych wzorami: $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, gdzie c - stała (równa prędkości rozchodzenia się fali).
b) Zbadać istnienie granicy:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + y^2}{2x^2 + y^4}.$$

Powodzenia!