IV seria zadań domowych z mechaniki klasycznej (2010/11)

Zad. 1. Wyznaczyć i przedyskutować ruch jednowymiarowy cząstki o masie m w polu sił o energii potencjalnej

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}.$$

W ramach dyskusji obliczyć dla ruchów ograniczonych okres ruchu, a dla nieograniczonych - czas, o jaki ten punkt materialny wyprzedzi swobodny punkt materialny na drodze od $x = -\infty$ do $x = \infty$.
Wskazówka: Przydatne podstawienie to $y = \sinh(\alpha x)$.

Zad. 2. Cząstka o masie m porusza się w polu sił o energii potencjalnej

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha \neq 0.$$

A) Korzystając ze wzoru Bineta

$$F_r = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right],$$

wykazać, że przy odpowiednim wyborze kierunku osi Ox tor ruchu cząstki opisuje równanie

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi},$$

i powiązać wartości stałych p i ε z momentem pędu L i energią E cząstki.
B) Sprowadzić otrzymane równanie toru dla $|\varepsilon| < 1$ do postaci

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

i wyznaczyć a, b oraz okres obiegu T cząstki w funkcji momentu pędu L i energii E (najpierw uzyskać wzór $r = p - \varepsilon x$).

Zad. 3. Wykazać, że w przypadku ruchu w polu siły o energii potencjalnej

$$V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha \neq 0$$

wektor Rungego-Lenza $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} - \alpha\vec{r}/r$ jest zachowany. Sprawdzić, że leży on w płaszczyźnie ruchu i jest skierowany wzdłuż prostej przechodzącej przez centrum siły i pericentrum toru.

Zad. 4. Cząstka o masie m i energii całkowitej $E = 0$ porusza się w polu sił o energii potencjalnej

$$V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^6}, \quad \alpha > 0.$$

A) Wyznaczyć ruch i tor cząstki dla momentu pędu $L = 0$.
B) Wyznaczyć i naszkicować tor cząstki dla $L \neq 0$ (a potem w poradniku Bronsztejna lub w internecie poszukać informacji o lemniskacie Bernoulliego).

26.10.2010