

VI seria zadań domowych z mechaniki klasycznej (2010/11)

Zadanie 1.

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 , połączone nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości $k > 0$ i zerowej długości w stanie nienapiętym, mogą się ślizgać po gładkich ramionach kąta prostego, którego dwusieczna jest skierowana pionowo w dół (przyspieszenie ziemskie g). Wypisać równania więzów i równania ruchu Lagrange'a I rodzaju. Wyznaczyć siły reakcji więzów i ruch punktów materialnych. Znaleźć położenie równowagi układu i odpowiadające mu siły reakcji więzów.

Zadanie 2.

Punkt materialny o masie m porusza się po gładkiej płaszczyźnie, która obraca się z prędkością kątową ω wokół poziomej osi z leżącej w tej płaszczyźnie (przyspieszenie ziemskie g). Wypisać równania Lagrange'a I rodzaju w nieinercyjnym układzie związanym z obracającą się płaszczyzną. Wyznaczyć ruch punktu materialnego i siłę reakcji więzów.

Zadanie 3.

Punkt materialny o masie m porusza się w jednorodnym polu siły ciężkości o przyspieszeniu $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ po łuku gładkiej cykloidy $x = a(\alpha - \sin \alpha)$, $y = a(1 + \cos \alpha)$, $z = 0$, gdzie $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Wykazać, że równania Lagrange'a I rodzaju można wtedy zapisać w postaci $m\ddot{x} = -\lambda \frac{dy}{d\alpha}$, $m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{dx}{d\alpha}$, i wypisać je. Wyznaczyć ruch cząstki oraz siłę reakcji więzów w zależności od α .

Wskazówka: Przy wyznaczaniu ruchu wykorzystać zasadę zachowania energii i przejść od kąta α do wychylenia $u = -4a \cos \frac{\alpha}{2}$ (mierzonego wzdłuż łuku) z położenia równowagi. Zwrócić uwagę na izochroniczność otrzymanego ruchu drgającego.

Zadanie 4.

Narciarz zjeżdża (bez tarcia) po stoku o opadającym ze wzrostem x i kształcie określonym przez krzywą $y = y(x)$, przy czym przyspieszenie ziemskie $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. Wyznaczyć siłę reakcji więzów w zależności od x i wykazać, że narciarz może oderwać się od stoku jedynie w punkcie x_{od} , w którym krzywa jest wklęsła (czyli $y''(x_{od}) < 0$).

9.11.2010