

MECHANIKA KLASYCZNA

Ćwiczenia dla II roku fizyki w r. ak. 2010/11

Zadania na kolejne cztery tygodnie (VI-IX):

Temat główny: równania Lagrange'a

1. równania Lagrange'a I rodzaju

Zad. 1. Dwa punkty materialne (m_1, m_2) połączone sztywnym (nieważkim) prętem o długości l na gładkich prostych $x = 0$ i $x = y$. Przyspieszenie ziemskie $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. Wypisać równania ruchu Lagrange'a I rodzaju, wyznaczyć położenie równowagi i siły reakcji więzów w tym położeniu.

Zad. 2. Punkt materialny na stożku kołowym o kącie rozwarcia 2α i osi pionowej do góry. Wypisać równania Lagrange'a I rodzaju, sprowadzić ruch do kwadratur i przedyskutować go. Znaleźć siłę reakcji w zależności od położenia punktu.

Zad. 3. Punkt materialny zsuwa się po zewnętrznej powierzchni kuli o promieniu R (więzy jednostronne). Wyznaczyć siłę reakcji w zależności od położenia i określić punkt oderwania się od kuli.

2. równania Lagrange'a II rodzaju, zasady zachowania

Zad. 4. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej znajduje się klin o masie M i kącie nachylenia α , połączony poziomą sprężyną o współczynniku sprężystości k i długości w stanie nienapiętym l_0 z pionową ścianą. Po gładkim klinie (równi) "zsuwa" się ciało o masie m , przyspieszenie ziemskie $\vec{g}$. Znaleźć lagranżjan, wypisać i rozwiązać równania Lagrange'a II rodzaju.

Zad. 5. Wyznaczyć całki ruchu w przypadku cząstki o ładunku q w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = B\vec{e}_z$ przy opisie ruchu:

a) w układzie walcowym z $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$,

b) w układzie kartezjańskim z $\vec{A} = Bx\vec{e}_y$.

Zad. 6. Punkt materialny na gładkim okręgu obracającym się ze stałą prędkością kątową wokół pionowej średnicy. Znaleźć lagranżjan, zachowywaną energię uogólnioną i efektywną energię potencjalną. Wyznaczyć położenia równowagi, zbadać ich trwałość i wyznaczyć częstości małych drgań wokół położenia równowagi trwałej.

3. małe drgania (na wykładzie będzie wahadło podwójne)

Zad. 7. Wzdłuż prostej pionowej mamy na końcu sprężyny punkt materialny o masie m , do którego podwieszona jest druga identyczna sprężyna z punktem materialnym m . Współczynniki sprężystości sprężyn k , długości w stanie nienapiętym l_0 , przyspieszenie ziemskie $\vec{g}$. Wyznaczyć położenia równowagi i małe drgania wokół nich.

Zad. 8. Wahadło sympatyczne, czyli dwa wahadła matematyczne płaskie zawieszone w odległości l_0 i połączone na dole sprężyną o długości l_0 i współczynniku sprężystości k .

Zad. 9. Przeanalizować małe drgania liniowej cząsteczki (np. CO_2) o lagranżjanie $L = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + M\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_3^2) + V(x_1 - x_2) + V(x_3 - x_2)$. (Nie jest istotna dokładna postać funkcji V - wystarczy znać wartość $\frac{d^2V}{dx^2}$ w punkcie odpowiadającym minimum energii potencjalnej).

Zad. 10. (zadanie trudniejsze - rezerwowe) Dwie gwiazdy o masach m_1 i m_2 poruszają się po okręgach wokół ich środka masy, przy czym odległość między gwiazdami wynosi a . W układzie odniesienia, w którym gwiazdy są nieruchome, znaleźć takie punkty, że umieszczony w nich punkt materialny pozostaje nieruchomy. Ograniczyć się do punktów nie leżących na prostej łączącej gwiazdy (te położenia równowagi noszą nazwę punktów Lagrange'a). Przeanalizować trwałość położenia równowagi (oprócz siły odśrodkowej istotna jest tu także siła Coriolisa).