

Dodatkowe kolokwium z mechaniki klasycznej 2010/2011
(22 stycznia 2011 r.)

KOLOKWIUM PIERWSZE

Zadanie 1 (5 pkt.)

Znaleźć i przedyskutować ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω pod wpływem siły wymuszającej $F(t) = F_0(1 - e^{-\beta t})$, $\beta > 0$, jeśli w chwili $t = 0$ oscylator spoczywał w swoim położeniu równowagi.

Zadanie 2 (5 pkt.)

Ciało o masie m i ładunku q porusza się w jednorodnych stałych polach elektrycznym \vec{E} i magnetycznym $\vec{B} \parallel \vec{E}$ w ośrodku o sile oporu $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, $\alpha > 0$. Znaleźć i przedyskutować ruch.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Cząstka o masie m porusza się w polu siły o potencjale $V(r) = -\frac{\beta}{r^3}$, $\beta > 0$, z energią $E = 0$.

- a) Znaleźć tor i ruch cząstki dla $L = 0$.
- b) Znaleźć i naszkicować tor cząstki dla $L \neq 0$.
(L jest momentem pędu cząstki względem centrum siły.)

KOLOKWIUM DRUGIE

Zadanie 1 (5 pkt.)

Narciarz o masie m zjeżdża po zboczu o kształcie $y = -ax^2$ w polu siły ciężkości o przyspieszeniu $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, przy czym w $t = 0$ mamy $\vec{r} = (0, 0)$, $\vec{v} = (v_0, 0)$.

- a) Wypisać równania ruchu Lagrange'a I rodzaju, wyznaczyć zależność siły reakcji od położenia i sprowadzić równania ruchu do kwadratur.
- b) Kiedy narciarz oderwie się od zbocza? Wyznaczyć jego ruch w tej sytuacji.

Zadanie 2 (5 pkt.)

Punkt materialny o masie m porusza się po gładkiej krzywej o równaniu $z = \alpha\rho^3$, $\alpha > 0$ (we współrzędnych walcowych), która obraca się dokoła pionowej osi z ze stałą prędkością kątową Ω (przyspieszenie ziemskie $\vec{g} = -g\vec{e}_z$).

- a) Wypisać równanie ruchu Lagrange'a II rodzaju i sprowadzić je do kwadratur.
- b) Wyznaczyć położenie równowagi trwałej (w układzie obracającym się) i częstość małych drgań wokół tego położenia.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Wyznaczyć ruch (przy małych wychyleniach od kierunku pionowego) płaskiego wahadła podwójnego, złożonego z dwóch wahadeł matematycznych o masie m i długości l , jeśli drugie wahadło jest podwieszane w połowie długości pierwszego (przyspieszenie ziemskie g).

KOŁOKWIUM TRZECIE

Zadanie 1 (7 pkt.)

Do poziomej sprężyny o współczynniku sprężystości $k > 0$ i długości w stanie nienapiętym l_0 , zaczepionej jednym końcem w początku układu współrzędnych, podwieszono niejednorodny pręt o długości L i masie M , który może wahać się w płaszczyźnie pionowej - gęstość liniowa pręta $\rho = \frac{2M}{L^2}x$, gdzie x jest odległością od punktu zawieszenia (przyspieszenie ziemskie g). Wypisać lagranżjan układu, znaleźć położenie równowagi trwałej i wyznaczyć częstości małych drgań wokół tego położenia.

Zadanie 2 (5 pkt.)

Końce jednorodnego pręta o masie M i długości $2L$ ślizgają się bez tarcia po gładkiej nieruchomej obręczy o promieniu $R > L$, znajdującej się w płaszczyźnie pionowej (przyspieszenie ziemskie g). Wypisać lagranżjan układu, znaleźć położenie równowagi trwałej i wyznaczyć częstość małych drgań wokół niego.

Zadanie 3 (3 pkt.)

Wyznaczyć funkcję $y(x)$, dla której wartość funkcjonału

$$\int_0^1 y' [(y')^2(1-x^2) + 1] dx$$

jest ekstremalna przy założeniu, że $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

Wskazówka: Warto wykorzystać swą wiedzę o całkach pierwszych równań Eulera-Lagrange'a (czyli w mechanice - równań Lagrange'a II rodzaju).

Powodzenia!