Zad 1a.
Spinowe stopnie swobody cząstki o spinie $\hbar$ można opisać, za pomocą następujących trzech macierzy rzutu spinu na kierunki $x$, $y$ i $z$

$$s_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Przeprowadzić pełną analizę spektralną tych macierzy: znaleźć wartości własne, wektory własne i operatory rzutowe reprezentujące pytania.
ii) Wyznaczyć prawdopodobieństwo twierdzącej odpowiedzi na pytanie: Czy cząstka ma rzut spinu na oś $x$ równy $\hbar$, gdy znajduje się ona w jednym ze stanów własnych operatora rzutu spinu na oś $z$.
iii) Wyznaczyć macierz gęstości opisującą stan będący mieszaniną wszystkich stanów własnych $s_x$ lub $s_y$. Jaki wniosek można wysnuć z porównania tych dwóch macierzy?

Zad 1b.
Podać spektralne własności (widmo, operatory rzutowe) operatora $U$ zdefiniowanego jako (bezwymiarowa) transformata Fouriera $U\psi = \phi$ w jednym wymiarze

$$\phi(x) = \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \exp(ixy)\psi(y).$$

Wsk.: Znaleźć wynik dwukrotnego działania transformaty Fouriera.

Zad 1c.
Dla jakiej wartości czynnika $N$ operator

$$(P\psi)(\mathbf{r}) = N \int d^3r' \delta(r - r') \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^4} \psi(\mathbf{r}').$$

jest operatorem rzutowym? Jak brzmi reprezentowane przez ten operator pytanie?

Zad 1d.
Znaleźć ewolucję czasową operatorów $s_x$ i $s_y$ zdefiniowanych w Zad.a w obrazie Heisenberga, gdy Hamiltonian dany jest wzorem $H = \hbar\omega s_z$.