UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Wydział Fizyki

Andrzej Szymacha

Przestrzeń i ruch

(Propozycja nowoczesnego nauczania zasad mechaniki
dla studentów Nauczycielskiego Kolegium Fizyki)

Wydanie III

WARSZAWA 2002

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Już w szkole podstawowej poznajemy fizykę na tyle, by uświadomić sobie jej ważną rolę w technice i w innych dziedzinach praktycznej działalności człowieka. Nie sposób bez dogłębnej znajomości fizyki skonstruować nie tylko układu scalonego do komputera, ale i pospolitego telewizora. Bez wiedzy dostarczanej przez fizykę nie byłoby ani lodówki, ani elektrowni, ani zdjęcia rentgenowskiego umożliwiającego złożenie złamanej nogi. Jeśli ktoś planuje być inżynierem, lekarzem, biologiem, czy tymbardziej zawodowym fizykiem, to jasne że powinien się uczyć fizyki, a że jest to wiedza rozległa, zaczynać trzeba wcześnie, w szkole.

Ale przecież te wymienione zawody wybierze tylko pewien ułamek uczniów szkoły średniej. Czy czas poświęcony na naukę fizyki nie będzie stracony dla wszystkich pozostałych? Istnieje wiele argumentów wskazujących na celowość poznawania fizyki, jej metod i osiągnięć, na użyteczność tej wiedzy, niezależnie od wypełnianych potem w życiu ról, szczególnie jeśli będą one wymagały „ruszania głową".

Powszechnie używane jest określenie fizyki, jako nauki ścisłej. Ścisłość oznacza wykorzystywanie ilościowego opisu, szerokie użycie matematyki, ale zarazem obiektywizm. Są obszary — nawet pożytecznej działalności człowieka, np. malarstwo — gdzie możliwe jest iż jeden z poważanych krytyków uzna obraz za arcydzieło, a drugi za kicz. I nie wiadomo za bardzo, jak rozsądnie rozstrzygnąć powstały między nimi spór.

Podobna sytuacja jest nie do pomyślenia w fizyce. Czy lepszym przewodnikiem prądu elektrycznego jest żelazo, czy miedź? Niczyja opinia, niczyj autorytet nie jest potrzebny. Wystarczy zmierzyć tzw. opór właściwy — ktokolwiek to zrobi zawsze wskaże na miedź jako na lepszy przewodnik. Jej zmierzony opór będzie po prostu mniejszą liczbą od oporu żelaza o tym samym kształcie i rozmiarach.

Jest fizyka nauką przyrodniczą, nauką o realnym świecie, o realnych zjawiskach. Odkrywane przez fizyków prawidłowości, tworzone przez fizyków teorie, dotyczą spraw niezwykle konkretnych, sprawdzalnych. Najefektowniejsze nawet argumenty teoretyczne, powoływanie się na najwyższe autorytety nic nie pomoże, gdy obserwowane fakty popadną w kolizję z przewidywaniami. Fizycy traktują jako rzecz naturalną możliwość nawet gruntownej przebudowy swoich poglądów, gdy nowe, dokładniejsze obserwacje wskażą na taką konieczność. Ta otwartość na fakty, programowy antydogmatyzm fizyków jakiż stanowi kontrast z niektórymi naukami społecznymi. Trzeba było kilkudziesięciu lat niedoli wielu pokoleń na znacznych połaciach globu, by zrezygnować z tez tzw. „naukowego socjalizmu" i przestać na siłę uszczęśliwiać ludzi. Wystarczyła jedna ekspedycja astronomów obserwujących zaćmienie Słońca według wskazówek Einsteina, by przekonać się że płaskość przestrzeni znana z geometrii Euklidesa i uznawana przez co najmniej dwa tysiąclecia jest tylko przybliżona. Podobnie, nuklearne eksplozje dowodzą niezbicie, iż suma mas produktów po reakcji nie jest równa sumie mas składników początkowych, mimo iż przez długie lata wydawało się to pozornie niewzruszonym fundamentem.

Takie trzeźwe podejście do rzeczywistości, umiejętność krytycznego spojrzenia na swoje wcześniejsze poglądy, a także umiejętność wydzielania spraw głównych, najistotniejszych w danym problemie, charakterystyczna dla fizyki, sprzyja skuteczności działania nie tylko przy pracy naukowej, czy czysto technicznej, ale i w działalności gospodarczej, społecznej, w większości nawet zwykłych życiowych spraw. Tak jak matematyka — wchodząca do programów nauczania wszelkich szkół od paru tysięcy lat — ćwiczy umysł przede wszystkim w logicznym myśleniu, tak fizyka ćwiczy racjonalne podejście do otaczającej nas rzeczywistości, wyrabia otwartość na nowe idee, uczy trzeźwego krytycyzmu.

Wielkie sukcesy fizyki w poznaniu i zrozumieniu praw przyrody, umiejętność przepowiadania nowych zjawisk, wielkie sukcesy techniczne oparte na osiągnieciach fizyki, stanowić mogą, i stanowią, dla wielu ludzi, niekoniecznie tych którzy sami wnieśli twórczy wkład do fizyki, powód do dumy z faktu przynależności do gatunku homo sapiens. Zarazem płynąca z fizyki świadomość, że poznane prawdy nie są ostateczne, że trzeba stale liczyć się przede wszystkim z faktami, uczy jakże potrzebnej skromności, chroni przed popadaniem w szkodliwy i niesympatyczny dogmatyzm.

Tradycyjnie fizyka dzieli się na różne „działy": mechanikę, naukę o cieple, elektryczność, optykę, magnetyzm, fizykę jądrowa itd. Jedne z tych działów rozpoczęto rozwijać już bardzo dawno (np. Archimedes, odkrywca kilku ważnych praw fizyki, żył w starożytności), inne dopiero w XX wieku. Obok zjawiska pojawiania się nowych działów, bardzo charakterystyczne w historii fizyki jest zmniejszanie się ich liczby związane z odkrywaniem powiązań między działami i ich zlewaniem się w jedną dziedzinę. Będziecie się z tym zapoznawać w trakcie nauki, tu zasygnalizować chcemy dwa przykłady.

- Nauka o cieple wydawała się początkowo zupełnie czymś innym niż mechanika. Na gruncie kinetyczno-molekularnej teorii materii wiemy teraz, że wyższa temperatura gazu oznacza większą prędkość cząsteczek tego gazu i większą ich łączną enegię kinetyczną. Mechaniczne własności atomów określają więc własności cieplne substancji złożonej z tych atomów.

- Póki optyka ograniczała się do wytwarzania dobrych okularów, magnetyzm rozwijał się w związku z produkcją kompasów, a elektryczność w związku z zakładaniem piorunochronów, optyka, magnetyzm i elektryczność wydawały się nie mieć ze sobą nic wspólnego. W trakcie nauki fizyki dowiecie się, że zgodnie z odkryciami dokonanymi w połowie ubiegłego stulecia, światło jest falą elektromagnetyczną. Już same użyte w powyższym zdaniu słowa pokazują, że te trzy w przeszłości odrębne dyscypliny, tworzą dziś fragment jednej większej całości.

Proces zrastania się działów fizyki ma swój odpowiednik w powstawaniu ścisłych związków między dyscyplinami. Od czasu gdy

Newton odkrył, że Księżyc podlega dokładnie temu samemu prawu przyciągania i prawu ruchu co spadające jabłko, astronomia — chcąc nie chcąc — włączona została do fizyki. Podobne związki wskazać można dla chemii i fizyki, a nawet dla biologii i fizyki.

Odwiecznym problemem dydaktycznym jest wybór pomiędzy ukazywaniem fizyki nowym pokoleniom w sposób zbliżony do tego jak ona się rozwijała, a więc przez kolejne historycznie ukształtowane pojęcia, i kolejne poglądy, albo tak jak ona widziana jest dzisiaj, bardziej całościowo, jak najbliżej sedna sprawy. Pierwszy sposób jest korzystny bo prowadzi w sposób naturalny od pojęć bardziej zwyczajnych, pospolitych, dostępnych łatwo naszym zmysłom i naszej intuicji, do pojęć trudniejszych, wymagających większej wyobraźni. Drugi jest bardzo skuteczny przy nauczaniu na najbardzie zaawansowanym poziomie. Jednak poznawanie całej drogi historycznej wymagałoby nierozumnie dużo czasu. By zrozumieć historyczne argumenty za wprowadzeniem takich czy innych pojęć, czy praw, trzeba by w jakiś sposób marnować czas na studiowanie błędnych poglądów i ślepych zaułków w jakie od czasu do czasu popadała nauka, a których przezwyciężanie prowadziło do postępu. Wybierzemy tu pewien kompromis polegający na ukazaniu rozwoju pojęć od najprostszych do bardziej złożonych, ale widziany z perspektywy tego co dzisiaj wiemy i jak dzisiaj rozumiemy najważniejsze prawa przyrody.

Rozdział 2

Kinematyka

2.1 Geometria — najstarszy dział fizyki.

Opisem położenia wzajemnego ciał, właściwościami utworzonych przez ciała linii i figur, wyznaczaniem wzajemnych odległości, zajmuje się — jak wiadomo — geometria. W tym sensie geometria jest częścią fizyki jako ścisłej nauki o ciałach materialnych, i to jej częścią najstarszą.

Wyrażony powyżej pogląd, choć trudno się z nim nie zgodzić, nie jest zbyt powszechnie głoszony. Geometrię traktuje się raczej jako "naukę czystą", część matematyki. Wskazuje się przy tym na różnice między wyidealizowanymi obiektami geometrii („prosta to długość bez szerokości", wg określenia Euklidesa) a ciałami rzeczywistymi. Każdy sznurek, czy narysowana ołówkiem prosta **ma** pewną grubość. Rzeczywisty sznurek ma, poza tym, skończoną długość, gdy prosta występująca w twierdzeniach geometrii jest oczywiście nieskończona. Ale dla fizyka ten argument nie jest żadnym argumentem. Żeby opisać użytecznie otaczającą rzeczywistość, idealizacje trzeba czynić zawsze, w każdej nauce przyrodniczej, nie tylko w fizyce. Fizyk raczej zapyta: Czy rysując trójkąty **coraz cieńszą kreską** i mierząc kąty wierzchołkowe **coraz dokładniej** będziemy dostawali wynikającą z geometrii sumę $180°$ z **coraz mniejszym** błędem? że tak istotnie będzie nie mieli wątpliwości starożytni twórcy geometrii. Przez długie stulecia nie wyobrażano sobie że mogłoby być inaczej. Można się jednak trochę dziwić, że ciała materialne, realne sznurki czy listwy, podlegają prawu wydumanemu, wypracowanemu samą logiką.

W istocie, przywołane twierdzenie o sumie kątów w trójkącie, nie może być wywiedzione „z niczego”. Dowód wymaga odwołania się do pewników (aksjomatów, postulatów) geometrii, czyli własności przyjmowanych bez dowodu. Pewniki te zostały sformułowane na podstawie obserwacji rzeczywistości. Skoro tak, to nic dziwnego że dobrze opisują zachowanie rzeczywistych ciał!

Matematyką czystą jest samo prowadzenie dowodu od w miarę oczywistych aksjomatów[1] do konkretnego, mniej oczywistego twierdzenia.

Matematyką czystą jest także wymyślanie zbiorów aksjomatów innych niż Euklidesa i badanie twierdzeń do jakich by one prowadziły, bez troski o to czy istnieje gdzieś, jakiś świat rzeczy opisywanych taką geometrią. Natomiast stwierdzenie, że geometria Euklidesa opisuje zachowanie ciał **rzeczywistych** z naszego otoczenia — a więc tym samym opisuje i nasze otoczenie, naszą przestrzeń — (z dokładnością tym lepszą im ciało bliższe ideału, a więc im sznurek cieńszy a kropka mniejszej średnicy), jest stwierdzeniem należącym do fizyki!

Jak w stosunku do każdego prawa fizyki, tak i do geometrii euklidesowej, nie można zatracić zdrowego krytycyzmu. Należy uczciwie zapytać: Jaki jest zakres stosowalności tej teorii? W jakich warunkach może się ujawnić zachowanie przedmiotów inne niż wynikające z jej twierdzeń?

Samo postawienie sprawy może wydać się zaskakujące! Za przykład głupoty uznajemy gdy ktoś kwestionuje twierdzenie matematyki, takie jak 2+2=4. Geometrię uważa się powszechnie za część matematyki, więc jakże śmiemy pytać. Wyjaśniłem, że geometrię można traktować jak naukę eksperymentalną dotyczącą ciał rzeczywistych, gdyż jej podstawy (w geometrii euklidesowej) wzięte są z

[1] Nie miejsce tu na wykład geometrii od podstaw, ale przytoczmy tu wybrane dwa aksjomaty.

- Przez dwa punkty przechodzi jedna prosta.
- Na płaszczyźnie, przez punkt nie leżący na prostej, można przeprowadzić dokładnie jedną prostą nie mającą z nią punktów wspólnych.

obserwacji. Możemy więc traktować geometrię jak część nauki o przyrodzie, część fizyki. A twierdzenia fizyki, jak już wspominaliśmy, wymagają czujności, wymagają weryfikacji i konfrontacji z coraz subtelniejszymi pomiarami przy coraz to innych wartościach obserwowanych wielkości, by w razie potrzeby zostać zamienionymi na inne, lepsze, dokładniejsze.

Pierwszym, który taką potrzebę weryfikacji geometrii sobie uświadomił był Gauss. Wielkim wysiłkiem zmierzył on sumę kątów trójkąta o wierzchołkach umieszczonych na trzech wzgórzach odległych o wiele kilometrów. W granicach dokładności pomiarów dostał wynik zgodny z wartością 180°, nie udało mu się więc to, co niemal po stu latach, udało się brytyjskiej ekspedycji Eddingtona, prowadzącego obserwację nieba w czasie zaćmienia Słońca w roku 1919. W doświadczeniu Gaussa zakrzywienie Ziemi nie miało znaczenia, bo promienie światła biegały ponad jej powierzchnią[2].

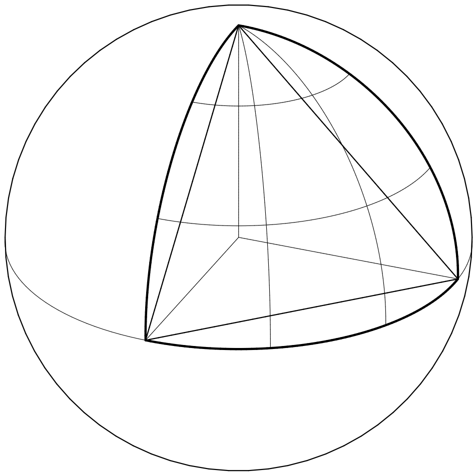
Ponieważ nie możemy zaprezentować pełnego rozumowania wiążącego obserwacje Eddingtona z pogwałceniem twierdzenia o sumie kątów dla gigantycznego trójkąta o jednym wierzchołku w gwieździe, a dwóch pozostałych w obiektywie teleskopu w momencie zaćmienia i pół doby wcześniej, pokażemy tu na analogicznym przykładzie jak może wyglądać, na czym polega, tworzenie kolejnych, coraz lepszych teorii pretendujących do opisu rzeczywistości[3].

---

[2]Ściśle biorąc, światło podlega przyciąganiu ziemskiemu, i jego promień w pobliżu Ziemi jest łukiem o promieniu krzywizny równym 10 bilionów kilometrów. Samo to powinno dać — gdyby przestrzeń w pobliżu Ziemi była poza tym całkiem płaska — nadwyżkę kąta ponad 180° w doświadczeniu Gaussa wynoszącą ok. 10^{-19}sekundy łuku. Dokładność teodolitów jest biliony razy gorsza, więc przejmowanie się uginaniem promienia światła nie było Gaussowi potrzebne. Doświadczenie Gaussa mogłoby wykryć promień krzywizny dużo, dużo mniejszy od powyższej wartości, choć dużo większy niż promień Ziemi.

[3]W przeciwieństwie do doświadczenia Gaussa, tutaj odchylenie promienia pod wpływem grawitacji Słońca nie jest już takie znikome i dla promienia nadbiegającego z daleka w pobliże Słońca, a potem daleko odeń odbiegającego, wynosi 0,87 sekundy łuku. Gdyby przestrzeń była płaska, o tyle na czas zaćmienia na niebie przesunęłyby się gwiazdy, które w czasie tego zaćmienia znalazły się (wizualnie) w pobliżu jego tarczy. Dopiero nadwyżka ponad tę wartość jest dowodem zakrzywienia przez Słońce samej przestrzeni w jego otoczeniu. Eddington wykrył odchylenie 1,74 sekund łuku — połowa tego jest przejawem krzywizny przestrzeni w pobliżu Słońca. Równość odchylenia spowodowanego krzywizną przestrzeni i odchylenia spowodowanego „spadaniem”

Krzywizna powierzchni Ziemi



Wielu ludzi, w tym dobrych geometrów, wierzyło przez wiele stuleci że Ziemia jest płaska. Gdy twierdzenia geometrii odnosić do linii i figur wytyczanych na gładkim polu, czy łące niezbyt wielkch rozmiarów, wszystko się zgadza. Oczywiście napięty sznurek leżący na Ziemi, czy narysowana w terenie linia, układa się wzdłuż łuku o promieniu Ziemi, ale fakt ten wywiera zbyt mały wpływ byśmy to zauważyli. Wychodzi nam z pomiarów suma $180°$, myślimy że żyjemy na płaskim dwuwymiarowym świecie. Żyjemy więc w błędzie, ale nie jest to błąd całkowicie prowadzący na manowce! Przecież geometria płaska stosowana do sznurków wyznaczających poletka do uprawy, po wylewie Nilu, dawała całkiem użyteczne rezultaty. Różnych kształtów działki wymierzone przez geometrę jako równej

światła na Słońce została przewidziana przez Einsteina w ramach jego tzw. „Ogólnej teorii względności". W przeciwieństwie do tzw. „Szczególnej teorii względności", którą poznamy, częściowo już niebawem, teoria ogólna jest za skomplikowana by wprowadzać ją do programu szkoły średniej, tak byście ją mogli w pełni zrozumieć, a nie tylko zapoznać się z wnioskami, jak w tym przypadku.

powierzchni dawały jednakowe plony! Mimo, że z punktu widzenia zdobytej później wiedzy o kulistości Ziemi teoria płaska jest formalnie błędna, faktyczny błąd dla niezbyt dużych figur jest znikomy.

Gdyby jednak przetrwać z teorią płaskiej Ziemi za długo i dożyć czasów wielkich odkryć geograficznych, jej nieprzystawanie do rzeczywistości ujawniło by się z całą mocą. Sprawdź na globusie, ile wynosi suma kątów „trójkąta" (naprawdę tzw. trójkąta sferycznego), o bokach utworzonych przez napięte nitki, łączące biegun z dwoma punktami na równiku, różniącymi się o 90° długości geograficznej. Niejeden z Was nawet bez globusu, we własnej wyobraźni dojrzy, że suma ta wynosi 270°. Nie będziemy tu tego dowodzić, ale łatwo uwierzyć, że suma kątów dowolnego trójkąta na powierzchni kuli (utworzonego z łuków kół wielkich, a więc najkrótszych linii łączących wierzchołki) jest większa od 180° o taki ułamek podwojonego kąta pełnego, jakim ułamkie powierzchni kuli jest rozpatrywany trójkąt.

Niejeden dociekliwy czytelnik może tu zaprotestować. Powie: gdyby trzy wspomniane punkty połączyć *prawdziwymi* prostymi, a więc wnikającymi do wnętrza skorupy Ziemi, suma kątów nadal by była 180°.

Prowadzi nas to do postawienia pytania co to jest prosta? Sceptyk powie, że w krzywej przestrzeni w ogóle nie „zmieści się" żadna prosta i nie ma problemu. Ale to mało twórcze. Jeśli podejrzewamy, że żyjemy w zakrzywionej przestrzeni, to powinniśmy określić jakoś prostą, po to chociaż, by się upewnić że to „prawdziwa prosta", gdy podejrzenie się nie potwierdzi?

Najrozumniejsza taktyka jaką dotychczas wymyślono, to przyjąć, że prosta (lepiej by może było mówić „najprostsza") to linia najkrótszej odległości dla każdej pary leżących na niej punktów. Pozwala to zawsze sprawdzić czy obiekt konkretny odpowiada tej definicji. Gdy znajdę inną drogę, krótszą od wcześniej wytyczonej — poprzednia nie była (najbardziej) prosta. W przypadku powierzchni Ziemi najkrótsza linia **nie opuszczająca** badanego tworu, czyli tejże powierzchni, to łuk koła wielkiego. Mały fragment kąta utworzonego przez dwa przecinające się koła wielkie, leży na powierzchni Ziemi,

> a nie nurkuje od razu pod powierzchnię jak kąt trójkąta wytyczonego przez „prawdziwe proste".
>
> Z Ziemią i innymi dwuwymiarowymi powierzchniami krzywymi zanurzonymi w trójwymiarowej przestrzeni płaskiej, jest o tyle łatwo, że ich krzywiznę można odkryć na dwa uzupełniające się sposoby. Albo ocenić z zewnątrz, z perspektywy kogoś mogącego swobodnie opuszczać ten dwuwymiarowy świat i widzącego, że rozpatrywany zbiór to nie płaszczyzna. Ten ktoś widzi, że najkrótsze linie łączące punkty, leżące na powierzchni, wytyczy gdy zejdzie z tej powierzchni.
>
> Ale odstępstwo od płaskości można też wykryć nie opuszczając powierzchni i mierząc np. sumę kątów „trójkąta" zbudowanego z najkrótszych boków możliwych do poprowadzenia w tym świecie. Gdy chcemy zweryfikować czy rzeczywisty trójwymiarowy świat jest płaski, tylko ten drugi sposób nam pozostaje. Natomiast pytanie, czy ewentualny krzywy świat trójwymiarowy wymaga zanurzenia go w płaskim, ale co najmniej czterowymiarowym świecie do którego z jakichś powodów nie mamy wstępu, trzeba zostawić bez odpowiedzi.

Na każdy metr kwadratowy daje to nadwyżkę kąta ponad 180° wielkości około jednej bilionowej stopnia. Dla całego hektara jest to nadal tylko jedna stumilionowa stopnia Ale dla jednej ósmej powierzchni Ziemi to już 90°.

Zastąpienie przy opisie linii najkrótszych na powierzchni Ziemi, geometrii płaskiej przez geometrię sferyczną, jest typowym przykładem postępu jaki wielokrotnie dokonuje się w nauce (można tu podstawić dowolną dyscyplinę przyrodniczą: astronomię, geografię, fizykę, chemię, etc.) w trakcie jej rozwoju. Przykład z powierzchnią Ziemi jest bardzo intuicyjny, zrozumiały. Trochę trudniej zrozumieć że i nasza przestrzeń trójwymiarowa nie jest ściśle płaska — wystarczy wiedzieć, że suma kątów dużych trójkątów różni się od 180°. Według Einsteina odstępstwo to zależy nie tylko od rozmiarów trójkąta, ale i od intensywności sił grawitacyjnych działających w jego obszarze. Z dala od wielkich mas przestrzeń „po staremu" byłaby — według Einsteina — płaska[4]. Odstępstwo od płaskości

[4] W Kosmosie nie da się, ze względu na jego wypełnienie gwiazdami, uciec od materii dowolnie daleko. Dlatego niezależnie od miejscowych większych

jest bardzo, bardzo, bardzo małe, i nie ma większego praktycznego znaczenia, chyba że chcemy się zająć własnościami czarnych dziur, czy całego Kosmosu. Nawet wspominany powyżej trójkąt badany przy okazji zaćmienia Słońca, trójkąt o rozmiarach astronomicznych przylegający możliwie blisko Słońca ma defekt kąta (odstępstwo od 180°) wynoszący 0,87 sekundy łuku, akurat drugie tyle o ile od linii najprostszej odpadnie promień światła pod wpływem grawitacji.

W ciągu dalszej nauki w szkole do problemu odstępstw przestrzeni od geometrii Euklidesa już wracać często nie będziemy. Warto jednak na tym przykładzie najstarszym, geometrycznym, uświadomić sobie charakter poznania naukowego. Żadna teoria, żaden pogląd nie może rościć sobie pretensji do ostateczności, ale gdy zostanie stworzona wizja dokładniejsza, ta stara teoria jest świetnym przybliżeniem nowszej, przy zastosowaniu do ograniczonego, wcześniej zbadanego zakresu zjawisk.

2.2 Położenie punktu, wektory

Położenie ciała opisać można tylko przez odwołanie się do innych ciał [5]. Mówimy na przykład: „daleko do domu", „już blisko do celu", „105 km od Warszawy na drodze do Katowic", itp. Szczególnie charakterystyczny jest ten ostatni przykład. Nie pozostawia on wątpliwości o jakie miejsce chodzi. To odwołanie się nazywamy także „odniesieniem", a stosowne ciała „ciałami odniesienia".

Określanie położeń na szosie, czy linii kolejowej, choć ważne w praktyce (gdy telefonujemy np. po pomoc drogową!), często przytaczane na początek w podręcznikach fizyki, ma jedną wadę.

zakrzywień przy dużych masach, Wszechświat posiada pewną krzywiznę średnią. Dzięki temu można mówić o jego zamkniętości i skończoności mimo braku zamykających go granic. Nawiasem mówiąc, wszystko wskazuje na to, iż w obecnej fazie ewolucji, promień krzywizny Wszechświata rośnie.

[5] Jest to spowodowanetym, że przestrzeń z samej swej natury nie uprzywilejowuje punktów z których się składa. Gdyby był inaczej, moglibyśmy orientować się gdzie jesteśmy, nie patrząc na inne ciała, lecz badając własności obszaru w którym się znaleźliśmy. Np. pilot szybowca może określić swoją wysokość nad Ziemią, nawet gdy jej nie widzi, przez sam pomiar ciśnienia atmosferycznego, które maleje z wysokością. Jednak po usunięciu atmosfery, „sma przestrzeń" nie pozwoliła by na określenie gdzie się jest.

Szosa, czy tor kolejowy, rzadko są prostoliniowe. Dla celów ogólniejszych, np. sporządzania planu, określania celów artyleryjskich, itp. z dwoma ciałami odniesienia wiążemy linię prostą. Odległość od pierwszego ciała odniesienia w kierunku[6] drugiego ciała odnosi się więc do punktu na prostej przechodzącej przez te ciała, a nie do byle jakiej krzywej. Jeśli opisywany punkt leży po przeciwnej stronie ciała odniesienia niż ciało pomocnicze, określając położenie, opatrujemy wartość odległości znakiem minus. Ta dodatnia lub ujemna wielkość nazywa się *współrzędną* punktu na prostej. Jest to wielkość ściśle spokrewniona z liczbą pokazywaną na lekcjach matematyki jako element osi liczbowej, tyle że w fizyce, współrzędna jest wielkością wymiarową, opatrzoną jeszcze mianem jednostki długo-

[6] W rozumieniu pojęcia kierunek, panuje w języku polskim i w podręcznikach pewna dwuznaczność. Sprowadza się ona do tego, że czasami kierunek wiąże się z całą prostą przechodzącą przez dany punkt, a czasami tylko z jedną z jej dwóch półprostych. To drugie rozumienie, występujące w artykułach naukowych i podręcznikach akademickich, a także w większości tłumaczeń z angielskiego, jest dużo naturalniejsze, wygodniejsze i odpowiada ściśle znaczeniu potocznemu. Gdy powiem komuś w jakim ma iść kierunku, wie on co ma robić. Podobnie wiedzą co mają robić artylerzyści po podaniu im kierunku prowadzenia ostrzału. Gdyby używać słowa kierunek w jego pierwszym znaczeniu, to po określeniu takiego „kierunku", a więc po podaniu prostej (np.: „strzelajcie wzdłuż południka") instruowana osoba musiałaby jeszcze zapytać: a jaki kierunek na tym „kierunku" wybrać? Nie wiadomo by było czy trzeba strzelać na północ czy na południe!

W naszym ujęciu, gdy już wiadomo o jaką prostą chodzi, nadal możliwe na niej są dwa kierunki. Gdy wiadomo o jaką płaszczyznę chodzi, kierunków jest tyle co punktów na obwodzie otaczającego okręgu, a w przestrzeni tyle, co punktów na sferze. Sfera niebieska, na przykład, jest taką pomyślaną powierzchnią której punkty utożsamiamy z kierunkiem do ciała niebieskiego. Przy pierwszym znaczeniu słowa kierunek odpowiedniość istniała by między wszystkimi kierunkami, a półsferą niebieską!

Zwolennicy odnoszenia słowa kierunek do prostej wprowadzają pojęcie „zwrot". Sami zapewne uczyliście się, że „wektor ma kierunek i zwrot". Ani w polskiej literaturze przedwojennej, ani w żadnej współczesnej literaturze angielskiej pojęcie „zwrot" w tym znaczeniu nie jest używane. Słowo „direction" — kierunek, zawiera w sobie i prostą i „zwrot" na niej. W tej książce , poza tą notką, nie spotkacie słowa „zwrot".

Gdy zwolennik dotychczasowej terminologii mówił: „ten sam kierunek i przeciwny zwrot", my powiemy: przeciwny kierunek. Gdy mówił: „ten sam kierunek i ten sam zwrot", my powiemy: ten sam kierunek. Prościej, wygodniej i zgodnie ze zdrowym sensem.

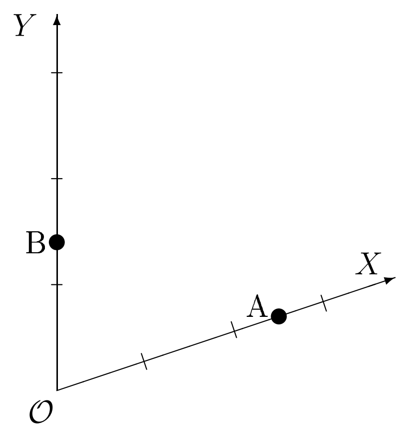
ści. Współrzędna może wynosić np. -3m.

W Polsce, podobnie jak we wszystkich niemal krajach świata, oficjalną jednostką długości (a więc i odległości) jest 1 metr. Zdefiniowany pierwotnie jako 1/10 000 000 część ćwiartki południka Ziemi, był realizowany praktycznie kolejno jako:

- odległość między kreskami na platynowo-irydowym wzorcu przechowywanym w Sëvres pod Paryżem.
- 1 650 763,73 długości fali elektromagnetycznej wysyłanej przez odpowiednio świecący izotop kryptonu 86.
- droga przebyta przez światło w czasie 1/299 792 458 sekundy. Ta ostatnia definicja obowiązuje od roku 1983.

Zastąpienie jednego, konkretnego wzorca, wielkościami dającymi się odtworzyć w każdym laboratorium, jest niewątpliwie dużo wygodniejsze niż oparcie się na jednym egzemplarzu wzorca. Szczególnie dla tych, co mieszkają daleko od Paryża! Ważne jest oczywiście i to, że pomiary wykonane z użyciem kolejnych wzorców mogą być coraz dokładniejsze. Chodzi o pomiary wykonywane dla celów naukowych. Dla celów bardziej przyziemnych, jak np. przygotowywanie narzędzi do produkcji śrub i nakrętek tak, by zawsze do siebie pasowały, niezależnie od miejsca wytworzenia, wszystkie kolejne wzorce są jednakowo dobre, gdyż różnią się od siebie w stopniu zupełnie znikomym.

Ustalenie punktu odniesienia i punktu dodatkowego wyznaczającego kierunek pozwala opisywać za pomocą jednej współrzędnej wszystkie miejsca należące do prostej przechodzącej przez te dwa punkty. A jak trzeba postąpić, gdy chcemy charakteryzować równocześnie wiele punktów nie leżących na jednej prostej, lecz w różnych miejscach na płaszczyźnie? W praktyce są stosowane co najmniej dwie metody określania (wskazywania, nazywania, opisywania — to różne określenia tej samej czynności) położenia punktu na płaszczyźnie. Można otoczyć punkt początkowy odniesienia okręgiem (o dowolnym promieniu) i wybrawszy jeden z punktów tego okręgu jako szczególny, określić wszystkie inne jego punkty wartością kąta jaki trzeba zatoczyć by dojść doń od punktu wybranego na tym okręgu jako początkowy. Procedura określania położenia polega na podaniu dwóch wielkości: po pierwsze kąta wybierającego kierunek, po drugie odległości od początku, we wskazanym kierunku. Wojskowi, a także harcerze, nazywają kąt wyznaczajacy kierunek — azymutem.

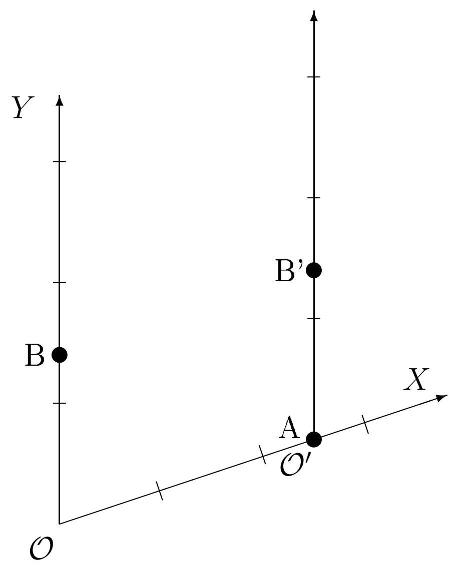


Istnieje inny sposób, dla wielu celów wygodniejszy, sposób wymyślony przez Kartezjusza ponad 300 lat temu. Polega on na wybraniu, obok punktu początkowego — oznaczmy go $\mathcal{O}$ — zwanego też początkiem układu odniesienia, dwóch innych (na płaszczyźnie), lub nawet trzech punktów pomocniczych (w przestrzeni) i utworzeniu dwóch (trzech) ukierunkowanych prostych wychodzących z wspólnego początku.

Jasne jest, że bez kłopotu możemy określić współrzedne punktów leżących albo na jednej, albo na drugiej prostej. Dla rozróżnienia z którą prostą mamy do czynienia będziemy współrzędne na tych prostych oznaczali różnymi literami, najczęściej x i y. Same proste będziemy nazywali osiami X i Y, lub osiami x-ów i y-ków.

Punkt A na powyższym rysunku ma współrzędną $x_A = 2,5$m, a punkt nazwany B ma współrzędną $y_B = 1,4$m. Żeby dojść do pojęcia współrzędnych punktu, który nie leży ani na osi x, ani na osi y, tylko gdziekolwiek na płaszczyźnie, wprowadza się pojęcie wektora, w tym wypadku wektora przesunięcia.

Nie jest trudno wyobrazić sobie operację przesunięcia punktu $\mathcal{O}$ do punktu A. Nałóżmy na przykład na płaszczyznę rysunku szybę i nanieśmy na niej punkt $\mathcal{O}$ wraz z wszystkimi innymi występującymi na rysunku liniami. I dokonajmy **równoległego** przesunięcia szyby przy którym $\mathcal{O}$ przesunie się do A.



Gdybyśmy ograniczyli się do przesunięć wzdłuż jednej i tej samej prostej, istniałby ścisły związek przesunięcia i współrzędnej x punktu A do którego przenosimy początek układu $\mathcal{O}$. Można powiedzieć, że tyle jest możliwych przesunięć, ile możliwych wartości x. Ale nie tylko to. Przesunięcia można przecież składać! Przesunąwszy najpierw o 2m, a po namyśle i stwierdzeniu że to za mało, dokonawszy na nowo przesunięcia wszystkiego o 0,5m, dostaniemy taki sam rezultat, jakbyśmy przesunęli od razu o 2,5m. Współrzędna przesunięcia wypadkowego jest sumą współrzędnych przesunięć częściowych. Przesunięcia wzdłuż jednego kierunku mogą być nie tylko dodawane do siebie, ale i mnożone przez liczby. Przesuwając np. pięć razy o 2m dostanę rezultat taki jakby przesunięcie nastąpiło od razu o 5×2m.

Istotą dyskutowanego przesunięcia wszakże jest nie tylko wielkość x, liczba określonych jednostek miary, ale i kierunek przesunięcia. Cały czas rozważamy — narazie! — przesunięcia wzdłuż prostej X. Jak należałoby przedstawić informację o takim przesunięciu, o wartości, dajmy na to 2,5m, gdyby zarazem trzeba zrezygnować z rysowania wszelkich innych elementów, w tym i osi x-ów?

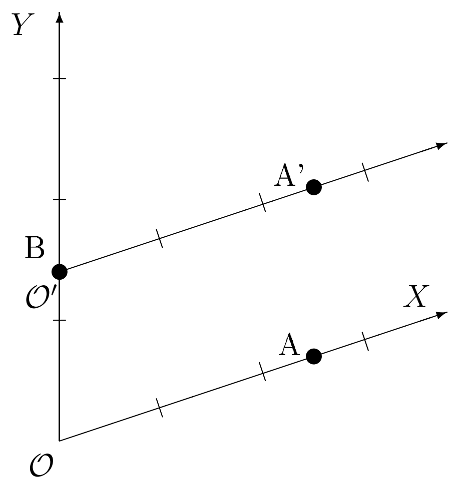
Pamiętacie zapewne tyle ze szkoły podstawowej, by zaproponować strzałkę o długości 2,5m, poprowadzoną od $\mathcal{O}$ wzdłuż osi X do punktu A. Nazywaliście taką strzałkę wektorem. W rzeczywistości związek między przesunięciem o którym myślimy, a reprezentującą go strzałką ma swoją subtelność, typową dla matematyki. Żeby wiedzieć jak przesunąć szybę, nie trzeba koniecznie opisać jak przesuwa się akurat punkt $\mathcal{O}$. Podając położenie początkowe i końcowe któregokolwiek punktu szyby zanotujemy (zaznaczymy, opiszemy, zapamiętamy) tę samą informację o przesunięciu. Zatem nieskończenie wiele innych strzałek RÓWNOLEGŁYCH do tej pierwszej, ale poza tym gdziekolwiek umieszczonych, np. od B do B', opisuje to samo przesunięcie.

Wektorem jest cała rodzina uporządkowanych par punktów (strzałek) równoległych do siebie.

Wektorów jest więc dużo mniej niż uporządkowanych par, czyli strzałek, ale za to jest ich dokładnie tyle co przesunięć. Każdemu przesunięciu odpowiada jeden wektor. Każdemu wektorowi odpowiada jedno przesunięcie.

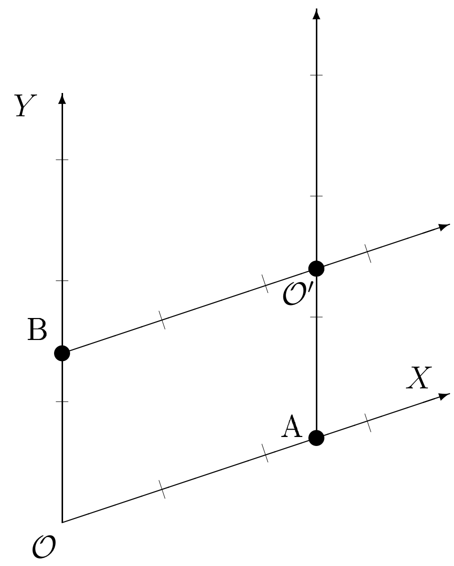
Nie sposób nie dostrzec tu analogii z pojęciem liczby wymiernej. Pozornie liczba ta ma i licznik i mianownik! Ale przecież $1/2 = 2/4 = 4/8 = 135/270$, itd, bez końca. Co jest licznikiem liczby 0,500...? Czy jest to 1, 2, czy może 135? Par liczb które ustawiamy nad i pod kreską ułamkową, by przedstawić liczbę którą mamy na myśli, jest nieskończenie wiele. Wszystkie one tworzą rodzinę (zwaną też klasą) par równorzędnych (mówi się też równych, równoważnych). Liczbą jest cała ta rodzina. Oczywiście w konkretnym obliczeniu wybieramy jakiegoś członka tej rodziny i dla liczby 0,5, wcale nie zawsze najwygodniej wybrać $1/2$! Gdy na przykład chcemy dodać tę liczbę do $1/8$, zapewne skorzystamy z przedstawienia $0{,}5 = 4/8$ jako najwygodniejszego.

Podobnie jak liczbę wymierną przedstawiamy jako konkretną parę liczb całkowitych, z mianownikiem (albo licznikiem) wybranym dla wygody, tak wektor charakteryzujący dane przesunięcie przedstawiamy jako strzałkę o konkretnym początku i końcu, ale wybór jednego z tych punktów jest do naszego uznania. Często wektor drugiego przesunięcia reprezentujemy strzałką zaczynającą się akurat tam, gdzie kończy się strzałka wybrana do reprezentowania wektora pierwszego przesunięcia. Wtedy strzałka o początku w początku pierwszej strzałki i końcu pokrywajacym się z końcem drugiej strzałki jest dobrą strzałką (ale nie jedyną dobrą!) opisującą przesunięcie wypadkowe.



Wróćmy do problemu opisu położenia punktu na płaszczyźnie. Jest jasne że płaszczyznę (szybę) można przesuwać kolejno nie tylko wzdłuż tej samej prostej! Gdybyśmy przesunęli początek układu o y najpierw wzdłuż osi Y, to znalazł by się on w punkcie B leżącym na tej osi w odległości 1,4 m.

Wykonajmy teraz przesunięcie dyskutowane poprzednio: o 2,5 m wzdłuż osi X. Punkt $\mathcal{O}$ przechodzi ostatecznie w punkt $\mathcal{O}'$, ten sam w który przechodzi punkt B z osi przy przesunięciu płaszczyzny o 2,5m wzdłuż osi x-ów.



Nietrudno zauważyć, że dokonując przesunięć w odwrotnej kolejności dotarlibyśby do tego samego punktu. Wynik składania przesunięć nie zależy od kolejności.

Efekt końcowy dwóch przesunięć jest nie do odróżnienia od pojedynczego przesunięcia, które przeniosłoby od razu początek układu $\mathcal{O}$ do punktu $\mathcal{O}'$. Strzałka prowadząca od $\mathcal{O}$ do $\mathcal{O}'$, jak też każda strzałka do niej równoległa, reprezentuje wektor wypadkowy dwóch przesunięć składowych.

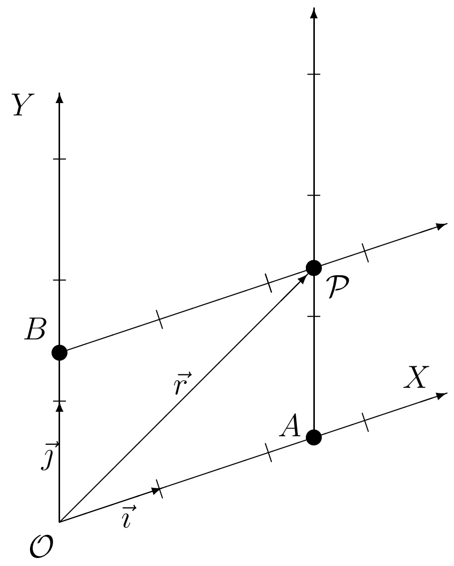
Oznaczając wektor przesunięcia o wybraną jednostkę wzdłuż osi X symbolem $\vec{\imath}$, a wektor przesunięcia jednostkowego[7] wzdłuż osi Y symbolem $\vec{\jmath}$, możemy wektory przesunięć o x i o y wzdłuż odpowiednich osi zapisać jako $x\vec{\imath}$ i $y\vec{\jmath}$. Wektor przesuwający początek układu do położenia, które oznaczymy symbolem $\mathcal{P}$, jest ich sumą $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Wektor ten może być — i w tym wypadku to najwygodniejsze — przedstawiony jako strzałka od $\mathcal{O}$ do $\mathcal{P}$. Taki wektor oznacza się też jako $\overrightarrow{\mathcal{OP}}$.

Mamy więc:

$$\overrightarrow{\mathcal{OP}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

[7] Choć może się to wydać dziwne, czasami wygodnie jest wybrać te jednostki na dwa różne sposoby.

Liczby x i y nazywają się *współrzędnymi punktu* $\mathcal{P}$. Wektor $\overrightarrow{\mathcal{OP}}$, zwany *wektorem wodzącym* (w tym wypadku punktu $\mathcal{P}$) jest całkowicie określony przez te same wielkości x i y. Nazywa się je w związku z tym *współrzędnymi wektora*.



Zaznaczone na rysunku wektory jednostkowe nazywają się *wersorami osi*. Wersory te wydłużone o czynnik x i y tworzą boki równoległoboku. Wektor wodzący punktu $\mathcal{P}$ jest przekątną tego równoległoboku. Wektory $x\vec{\imath}$ i $y\vec{\jmath}$ nazywają się składowymi wektora. Na powyższym rysunku każdej z tych składowych odpowiadają dwie szczególnie wygodne strzałki. Dla składowej $x\vec{\imath}$ są to strzałki od $\mathcal{O}$ do A, lub od B do $\mathcal{P}$. Podobnie dla składowej wzdłuż osi Y.

Wektor wodzący, zwany też *promieniem*[8] *wodzącym* oznacza się najczęściej symbolem $\vec{r}$. Gdy rozważa się jednocześnie kilka punktów dodaje się do litery r jakieś wyróżniki takie jak np. „prim", albo kolejne liczby: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ itp.

Podstawowy rezultat powyższych rozważań możemy zapisać jako

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

[8]Promień — po łacinie *radius*.

W przestrzeni trójwymiarowej należy wprowadzić jeszcze jedną prostą zorientowaną Z, odpowiadający jej wersor $\vec{k}$ i jeszcze jedną współrzędną z.

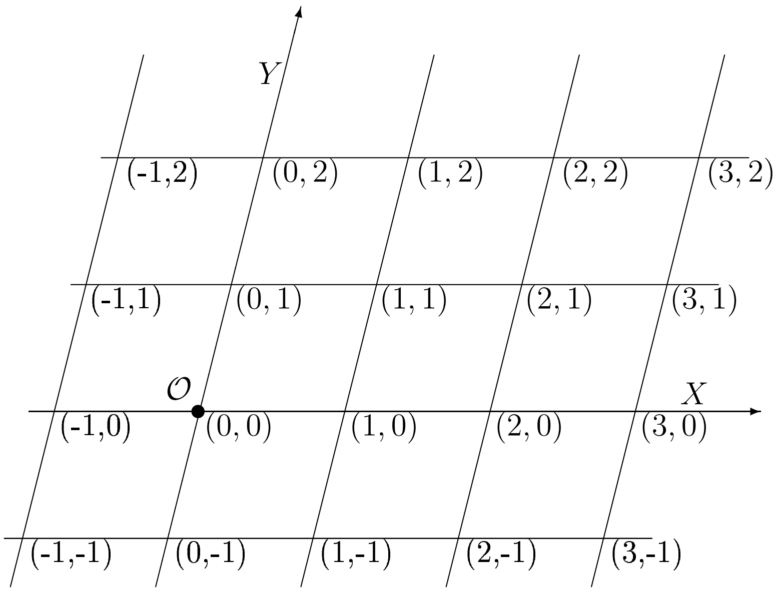
Z własności wektorów warto zapamiętać:

- Wektorowi odpowiada rodzina nieskończona strzałek równoległych i o równej długości.
- Mnożymy wektor przez liczbę mnożąc długość każdej z reprezentujących go strzałek przez tę liczbę (i zmieniając orientację gdy liczba jest ujemna).
- Sumę dwóch wektorów znajdujemy jako przekątną równoległoboku, zbudowanego na dwóch reprezentantach dodawanych wektorów wystawionych z wspólnego punktu, albo przez nasunięcie początku drugiej strzałki na koniec pierwszej i poprowadzeniu trzeciego boku możliwego do utworzenia w ten sposób trójkąta.
- Gdy wybrane są osi X i Y i wersory na tych osiach, wektor scharakteryzowany jest przez swoje dwie (w przestrzeni trzy) współrzędne.
- Współrzędne sumy wektorów są sumami współrzędnych dodawanych wektorów. Mnożenie wektora przez liczbę pociąga za sobą mnożenie współrzędnych przez tę samą liczbę.

Oprócz wektorów przesunięcia o współrzędnych wyrażonych, np. w metrach, świat pełen jest wektorów innych wielkości fizycznych.

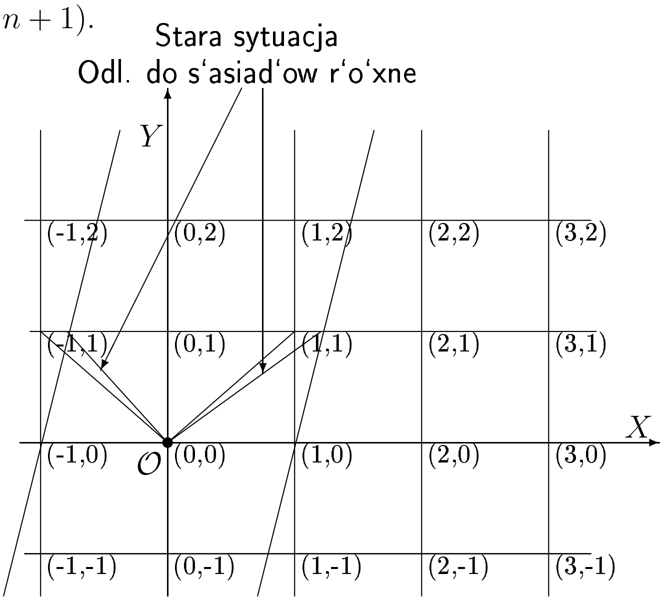
Rozważmy napięty łuk. Gdy zwolnimy cięciwę zacznie się ruch strzały w jej własnym kierunku. Prędkość tej strzały, jej przyspieszenie, działająca siła — wielkości o których słyszeliście w szkole podstawowej, a którymi zajmiemy się ponownie niebawem — wszystkie wyróżniają wspólny, pokazywany przez ustawienie strzały, kierunek. Wszystkie one są wektorami. Stosują się do nich reguły dodawania, rozkładania na składowe, itp., identyczne jak do wektorów przesunięć.

W dotychczasowych rozważaniach osi X i Y poprowadzone były dowolnie. Rozkładanie wektora na dwa wzajemnie skośne kierunki jest czasem bardzo użyteczne. Jednak w większości wypadków, po wyborze pierwszej osi X, wygodniej jest oś Y dobrać w narzucający się, symetryczny sposób. Żeby wyraziściej dostrzec problem właściwego, wygodnego wyboru układu współrzędnych (spośród innych możliwych), zaznaczmy na płaszczyźnie z dowolnymi dwoma wersorami, punkty o współrzędnych wyrażających się liczbami całkowitymi.



Pierwsza liczba w nawiasie podaje współrzędną x, druga y. Gdybyśmy, przystępując do zagospodarowania pewnego placu budowy, chcieli wprowadzić taki układ współrzędnych, by kolejnym robotnikom wskazywać gdzie mają kopać jakieś dołki, wbijać pale, etc, etc, to zamiast wołać za każdym razem geodetę, by wyznaczył właściwe miejsce zgodne z planem zagospodarowania, moglibyśmy przygotować pewną ilość identycznych sznurków, porobić na nich w równych odstępach węzełki i porozpinać równolegle — znów w jednakowych odstępach — te sznurki na placu. Gdybyśmy jeszcze poprzyczepiali do węzełków pary liczb wyrażające numer sznurka (y) i numer węzełka (x), mielibyśmy układ współrzędnych zrealizowany w niesłychanie konkretny sposób. Żadnej abstrakcji! Wystarczy powiedzieć: „wbij kołek przy trzecim węzełku czwartego sznurka". I wiadomo gdzie to jest.

Patrząc na nasz ostatni rysunek zdajemy sobie sprawę, że układ współrzędnych można udoskonalić. Zostawiając sznurek o współrzędnej $y = 0$, a więc ten przechodzący przez punkt $\mathcal{O}$ w spokoju, możemy przesunąć wzdłuż siebie sznurek o współrzędnej $y = 1$ nieco w lewo, tak by odległość między węzłami $(0,0)$ a $(1,1)$ i między $(0,0)$, a $(-1,1)$ była taka sama. No bo po co wyróżniać jeden z dwu przeciwnych kierunków? Oczywiście korekty należy wprowadzić na wszystkich sznurkach, by uzyskać to, żeby zawsze odległość puktów (m,n) i $(m+1,n+1)$ równa była odległości punktów (m,n) i $(m-1,n+1)$.



Warunek ten sprowadza się do tego, by osi X i Y były prostopadłe. Zauważmy, że na przykładowym placu budowy właściwe przesunięcie sznurków przywracające symetrię można wykonać posługując się kawałkiem sznurka, czy tyczki BEZ UżYCIA KĄTOMIERZA[9]. Można nawet nie wiedzieć co to jest kąt, by skonstruować symetryczny układ współrzędnych.

Przy symetrycznym wyborze osi, współrzędne punktu można interpretować także jako odległości do odpowiednich osi, co nie ma miejsca w układzie ukośnokątnym.

[9] Jest to metoda identyczna jak wystawianie prostopadłej przy pomocy cyrkla, wałkowane zwykle na lekcjach geometrii.

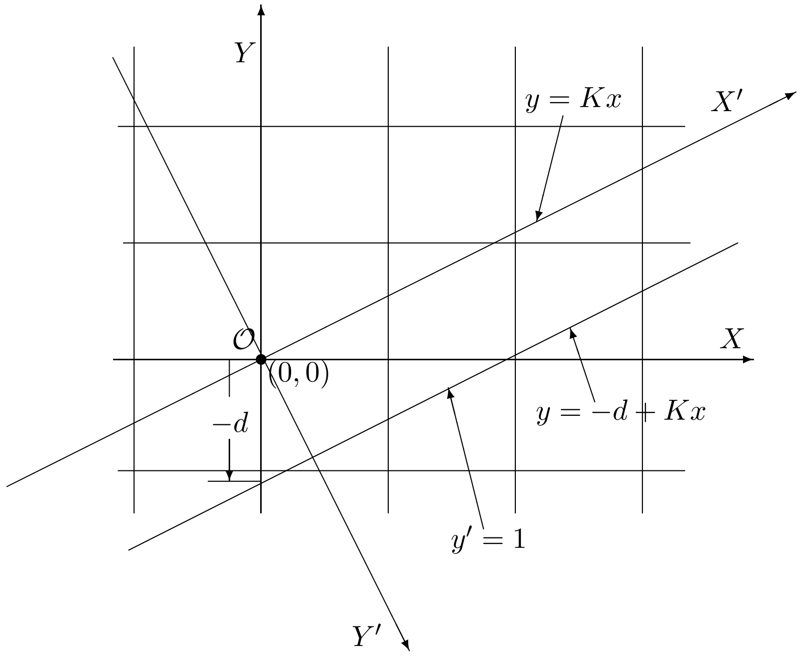
Choć może nie będzie to natychmiast widoczne, wielkie znaczenie, fundamentalne dla rozwoju fizyki w XXw. ma rozważenie związku między „ponumerowaniem" punktów na płaszczyźnie parą liczb (x, y) związaną z wyborem jednej rodziny równoległych prostych z „węzełkami", a ponumerowaniem tej samej płaszczyzny liczbami wynikającymi z wprowadzenia innej, ale podobnej, rodziny prostych, wzajemnie równoległych, ale nierównoległych do pierwszej rodziny.

Ten pozornie błachy, geometryczny problem, jest dlatego tak ważny, że dotyka zagadnienia *symetrii.* Wiek XX w fizyce, to wielka kariera pojęcia symetrii. Choć wszystkie kropki nad i nie zostały jeszcze postawione, zaczyna być jasne, że tam poznanie naukowe odnosi wielkie triumfy, gdzie myśl ludzka wpadnie na trop takiej czy innej faktycznie występującej w przyrodzie symetrii. Także te odkrycia, które zostały dokonane w przeszłości bez tej świadomości, bez stosowania argumentów symetrii, okazują się dlatego takie głębokie i skuteczne, że w istocie wiążą się z taką czy inną symetrią.

Także geometria, takie np. twierdzenie Pitagorasa, okazuje się konsekwencją pewnej naturalnej, prostej symetrii. Właśnie rozważenie związku między współrzędnymi (x, y) punktu w jednym układzie współrzędnych, z współrzędnymi (x', y') tego samego punktu w innym, **obróconym** względem poprzedniego, układzie współrzędnych, jest ważnym przykładem ukazującym funkcjonowanie i siłę odkrywczą argumentów symetrii. Te same argumenty, te same prawie równania, przeniesione do podobnego problemu związku między współrzędnymi przestrzennymi i czasowymi pozwolą nam zrozumieć istotę teorii względności Einsteina, pozwolą nam zrozumieć dlaczego działa bomba atomowa, a także zbliżą nas do zrozumienia problemu początku Wszechświata!

Wprowadźmy więc dwa układy współrzędnych identycznie skonstruowanych, o wspólnym początku, ale których osie są wzajemnie „skręcone". Ten fakt skręcenia zapiszmy przy pomocy współczynnika kierunkowego K osi X' względem układu U. Dla „sznurka" o współrzędnej $y' = 0$, wszystkie węzły spełniają równanie:

$$y = Kx$$



Sznurek o $y' = 1$ przecina oś Y w punkcie o współrzędnej którą oznaczymy $-d$. Jasne, że linia o $y' = 2$ przecina tę oś w punkcie $-2d$, ogólnie dla dowolnego y', współrzędna punktu przecięcia jest $-dy'$. Wszystkie te proste (o ustalonej wartości y') są równoległe, ich współczynnik kierunkowy jest ten sam, a równanie jakie spełniają węzły należące do sznurka o danym y' jest:

$$y = -dy' + Kx$$

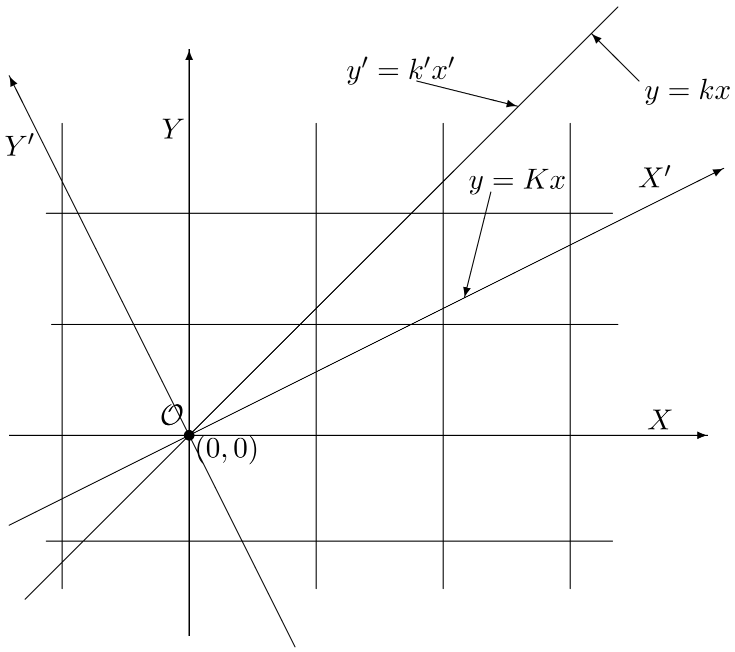
Teraz przywołujemy argument symetrii[10]. **Z punktu widzenia układu $X'Y'$ sznurki układu XY mają identyczne własności**, ich równaniem musi być:

$$y' = -dy + Kx'$$

[10]Symetria to inaczej jednakowość, równoprawność, demokracja. Przestrzeń w której żyjemy, sama z siebie nie wyróżnia żadnego kierunku. Układ współrzędnych z jednymi osiami nie jest ani lepszy, ani gorszy, od każdego innego układu współrzędnych o inaczej wybranych osiach.

Co wiemy o współczynniku d?. Jasne że dla $K = 0$, gdy nie ma skręcenia, musi być $d = 1$. Ale dla $K \neq 0$ nikt nam nie wmówi, że powinno nadal być $d = 1$!

Aby wyznaczyć zależność $d(K)$, zastosujemy następujące rozumowanie. Po pierwsze zmienimy znak osi Y'.



Prowadzi to do zmiany dwóch znaków w równaniach transformacji:

$$y = dy' + Kx$$

$$y' = dy - Kx'$$

Na rysunku poprowadziliśmy teraz jeszcze jedną prostą $y' = k'x'$, która mogłaby być osią x-ów jeszcze jednego układu współrzędnych, jakiegoś $X''Y''$. Obliczmy jakie jest jej nachylenie w układzie osi X. W tym celu wstawiamy do obu naszych równań $k'x'$ zamiast y' i rozwiązujemy względem x i y. Dostajemy po elementarnych przekształceniach:

$$y = x'(K + k')/d$$

oraz

$$x = x'(1 + Kk'\frac{1-d(K)^2}{K^2})/d$$

Dzieląc stronami dostajemy:

$$\frac{y}{x} = \frac{K+k'}{1+Kk'\frac{1-d(K)^2}{K^2}} = k$$

Współczynnik kierunkowy rozpatrywanej lini k wyraża się przez współczynnik kierunkowy w układzie „primowanym" k' i współczynnik K charakteryzujący skręcenie układów wzorem:

$$k = \frac{K+k'}{1+Kk'\frac{1-d(K)^2}{K^2}}$$

Ale gdyby teraz związać z rozpatrywaną linią nowy układ współrzędnych, i względem niego określić nachylenie linii $y = 0$, powinniśmy skorzystać z wyprowadzonego wzoru w którym role K i k' byłyby zamienione. A kąt między osią X i rozpatrywaną linią jest taki sam, czy traktować go jako wynik nachylenia k' względem układu o nachyleniu K, czy jako wynik pochylenia K w układzie nachylonym z współczynnikiem k'. Mamy przeto:

$$\frac{K+k'}{1+Kk'\frac{1-d(K)^2}{K^2}} = \frac{k'+K}{1+k'K\frac{1-d(k')^2}{k'^2}}$$

Z powyższego związku wynika natychmiast, że:

$$\frac{1-d(k')^2}{k'^2} = \frac{1-d(K)^2}{K^2}$$

A zatem zamiana w kombinacji: $\frac{1-d(K)^2}{K^2}$ wielkości K na zupełnie inną, dowolną wartość k' nie powoduje zmiany jej wartości! Kombinacja ta musi być więc stałą NIEZALEżNĄ od kąta skręcenia opisanego wartością K. Oznaczmy stałą literą C. Dostajemy:

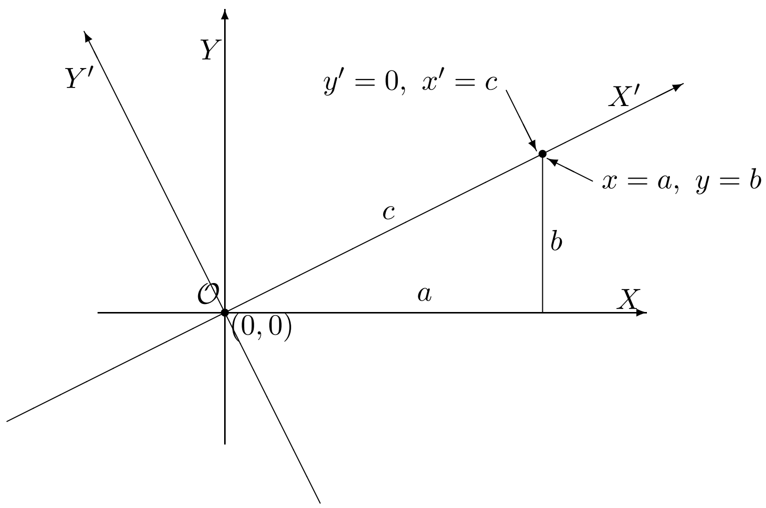
$$d = \sqrt{1 - CK^2}$$

Daje to symetryczny, jak należy, wzór na współczynnik kierunkowy k względem osi XY prostej o współczynniku k' względem osi $X'Y'$:

$$k = \frac{K + k'}{1 + CKk'}$$

Wstawienie wyniku na współczynnik d do równań wiążących y, x z parą wartości y', x' daje po ich elementarnym rozwiązaniu:

$$y = \frac{y' + Kx'}{\sqrt{1 - CK^2}}$$
$$x = \frac{x' + CKy'}{\sqrt{1 - CK^2}}$$



Póki jednostki na osiach X i Y (a więc i na osiach X' i Y') są wybrane niezależnie (choć jednakowo w obu układach), o wartości stałej C nic powiedzieć nie możemy, gdyż zależy ona od tego wyboru. Jednakże zmiana jednostek może zmieniać tylko wartość bezwzględną stałej C, jej znak jest od tego niezależny. Jaki jest więc znak stałej C? Czy można go określić rozglądając się dookoła po świecie? Rozpatrzmy trzy punkty: początek układu, punkt o współrzędnych $x' = c, y' = 0$ mający współrzędne $x = a$ i $y = b$

dane powyższymi wzorami, oraz punkt $(a, 0)$ na osi x-ów. Oczywiście $K = b/a$. Odcinek łączący początek układu z punktem na osi X' nazywa się przeciwprostokątną, boki pozostałe przyprostokątnymi. Według naszych wzorów mamy:

$$x' = x\sqrt{1 - CK^2}, \quad \text{czyli} \quad c = \sqrt{a^2 - Cb^2}$$

WIEMY z doświadczenia, że przeciwprostokątna jest dłuższa od przyprostokątnych! Zatem na płaszczyźnie Euklidesa musi być $C < 0$. Wybierając jednakowe jednostki na obu osiach dostajemy ostatecznie $C = -1$, a nasze wzory transformacyjne przyjmą elegancką postać:

$$y = \frac{y' + Kx'}{\sqrt{1 + K^2}}$$

$$x = \frac{x' - Ky'}{\sqrt{1 + K^2}}$$

Łatwo sprawdzić, podnosząc obie strony do kwadratu i dodając, że:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Suma kwadratów jest więc niezmiennikiem. Współrzędna punktu x' gdy leży on na osi X' jest jego odległością od początku układu. Korzystając z niezmiennika mamy

$$x'^2 + 0 = x^2 + y^2 = \text{odległość}^2$$

Jest to twierdzenie Pitagorasa. Dostaliśmy je jako nieuchronną konsekwencję obserwowanej faktycznie symetrii przestrzeni, w połączeniu z prawdziwym faktem iż przeciwprostokątna jest dłuższa od każdej z przyprostokątnych.

Wzór wiążący współczynnki kierunkowe przyjmuje postać:

$$k = \frac{K + k'}{1 - Kk'}$$

Gdy teraz skorzystać z trygonometrii i wprowadzić kąt α, taki że $K = \mathrm{tg}\alpha$, wtedy $1/\sqrt{1 + K^2} = \cos\alpha$ oraz $K/\sqrt{1 + K^2} = \sin\alpha$, i transformację można zapisać:

$$y = y' \cos\alpha + x' \sin\alpha$$

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

Jeśli jeszcze oznaczyć przez β kąt jaki odpowiada nachyleniu k': $k' = \mathrm{tg}\beta$, dla nachylenia k dostajemy:

$$k = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

Po prawej stronie wyszedł wzór na tangens sumy kątów, jak być powinno, gdyż kąt jaki z osią X tworzy rozpatrywana prosta jest sumą kąta o jaki obrócona względem tej jest oś X' i kąta o jaki względem osi X' obrócona jest rozpatrywana prosta!

Dla bardzo niewielkich kątów, gdy tangens jest w przybliżeniu równy kątowi, zachodzi:

$$k \simeq K + k',$$

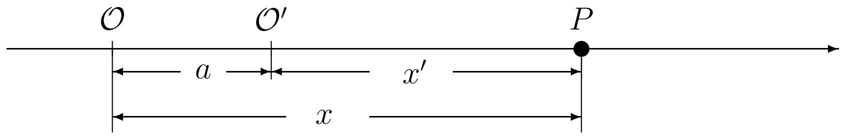
jednak nikt przy zdrowych zmysłach nie będzie się dopominał by to był wynik ścisły, by współczynniki kierunkowe się dodawały!

Wybraliśmy żmudną drogę by dojść do powyższych wyników, ale to nam powinno zaprocentować w niedalekiej przyszłości.

2.3 Ruchy względne ciał swobodnych

Do opisu położenia rzeczywistych ciał potrzebne są z reguły wszystkie osie współrzędnych, do zrozumienia wielu najważniejszych pojęć fizyki dotyczących ruchu wystarczy niekiedy ograniczyć się do ruchów odbywających się wzdłuż jednej prostej.

By określać położenie punktu na prostej trzeba, jak już wiemy, wybrać na niej punkt zerowy (punkt odniesienia) i punkt wytyczający kierunek gdzie współrzędne są dodatnie. Coś wybrać trzeba, ale wybór ten jest całkiem dowolny. Sama wielkość x, współrzędna, charakteryzująca określone położenie, może być różna dla różnych wyborów punktu odniesienia:



Jeden i ten sam punkt P w tym samym położeniu ma współrzędną x', gdy początek układu wybrać w punkcie $\mathcal{O}'$ i współrzędną $x = x' + a$, gdy początek układu związać z punktem $\mathcal{O}$.

Na tym m. in. polega względność położenia. Nie wiadomo bezwzględnie, tzn. bez uwzględnienia tego co się przyjmie jako punkt odniesienia, jaka liczba opisuje położenie konkretnego punktu. Może to być i x i x'. Względem $\mathcal{O}$ położenie opisuje wartość x, względem $\mathcal{O}'$ wartość współrzędnej wynosi x'.

Wieloznaczność ta nie przeszkadza w udzieleniu odpowiedzi na interesujące pytania fizyczne. Gdy oprócz punktu P_1 mamy drugi punkt, np. P_2, to odległość d między nimi, będąca wartością bezwzględną różnicy współrzędnych, nie zależy od tego jakiego punktu odniesienia użyjemy:

$$d = |x_1 - x_2| = |(x'_1 + a) - (x'_2 + a)| = |x'_1 - x'_2|$$

Mówimy, że odległość punktów, wyliczona określonym wzorem ze współrzędnych względnych (w tym wypadku przez odejmowanie i wzięcie tzw. modułu), sama jest bezwzględna, tzn jej wartość wychodzi ta sama, niezależnie czy do wzoru wstawimy jeden, czy drugi zespół wartości współrzędnych. To bardzo specjalna własność. Byle jaka funkcja współrzędnych obliczona dla zmienionych ich wartości wyjdzie z reguły inna. Funkcja współrzędnych która się nie zmienia w takiej sytuacji nosi nazwę **niezmiennika**. Wyszukiwanie takich niezmienników w różnych dziedzinach fizyki jest jednym z ważniejszych zajęć fizyków.

Geometria się kończy, to znaczy przestaje wystarczać do opisu sytuacji, gdy wzajemne położenia ciała badanego i ciał odniesienia[11] nie są niezmienne. W takiej sytuacji mówimy o ruchu. Po-

[11] Mówimy stale ciała odniesienia, w liczbie mnogiej, bo choć początek układu odniesienia wyznaczony jest przez jedno ciało, to do utworzenia osi współrzędnych potrzebne są ciała dodatkowe — od jednego na prostej potrzebnego tylko do wyznaczenia orientacji, poprzez dwa na płaszczyźnie, do trzech w przestrzeni.

nieważ położenie jest względne, to i ruch jest względny — da się określić tylko względem konkretnych ciał odniesienia.

Zapytajmy dlaczego raz jest bezruch, a innym razem ruch?

To pytanie otwiera wielkie pole do badań. Gdy raz zajmiemy się ruchem, zaraz będziemy chcieli wiedzieć jak go opisać (CZAS — co to jest czas? W bezruchu czas można zignorować, choć jako żywi ludzie czujemy, że coś takiego istnieje. Nawet w pozornym bezruchu bije nam przecież serce i ruszają się jelita.), co wpływa na ruch?, jak go przewidywać?, etc, etc.

Nie wchodząc w żadne szczegóły, możemy z pewnością wyróżnić następujące możliwości:

- W taki, czy inny sposób ktoś lub coś DZIAŁA na ciała odniesienia.
- I ciało badane i ciała odniesienia są SWOBODNE od wpływu innych ciał.
- W taki czy inny sposób ktoś, lub coś działa na interesujące nas ciało, a nic nie narusza spokoju ciał odniesienia.

Przypadek pierwszy dzieli się jeszcze na dwie grupy — gdy badane ciała są swobodne i gdy są też poddane oddziaływaniu. Jaskrawo nieracjonalne byłoby rozważanie tej pierwszej sytuacji!! Choć podział na ciała badane i ciała odniesienia jest umowny, to przecież naprawdę nazywając jedno z ciał, ciałem badanym, dajemy sami sobie do zrozumienia, że interesuje nas zachowanie tego właśnie ciała. Interesuje nas jego sposób reagowania na bodźce, itp. A tymczasem przez odnoszenie położenia swobodnego, „Bogu ducha winnego", ciała do „wariujących" ciał odniesienia rejestrowalibyśmy dziwaczne bogactwo ruchu. Odnosząc ruch różnorakich ciał do jednego i tego samego ZŁEGO, bo poddanego jakiemuś oddziaływania ciała odniesienia, zauważylibyśmy że wszystkie te ciała, bez żadnej przyczyny, wykonują identyczny ruch — będący odbiciem ruchu ciała odniesienia. Gdy i na ciała odniesienia, i na badane ciała działają jakieś czynniki, jest jeszcze gorzej. Sam diabeł nie odróżni, co w specyfice obserwowanego ruchu (czyli zmiany **wzajemnego** ustawienia) jest spowodowane wpływem czynników na „nasze" ciało, a co wpływem na ciała odniesienia . A zatem:

Na ciała odniesienia powinniśmy wybierać ciała swobodne.

> Gdy już ustalimy ogólne prawa ruchu, posługując się swobodnymi ciałami odniesienia — a więc w sytuacji unikającej niepotrzebnych komplikacji — może być interesujące i użyteczne zbadać ruch względny ciała i pewnych ciał odniesienia poddanych oddziaływaniu. Gdy samochód którym jedziemy wpada na drzewo — co wpływa na jego ruch bardzo dramatycznie! — ważne jest przewidzieć ruchy naszych ciał względem tego pechowego układu odniesienia. Znajomość praw ruchu i naszych ciał (tych z rękami i nogami) i samochodu względem swobodnych ciał odniesienia wystarczy w zupełności do zrozumienia tej sytuacji wyjątkowej, z „nieswobodnym" układem odniesienia.

Przypadek pierwszy nieswobodnych ciał odniesienia wyeliminowaliśmy więc. Przypadek trzeci to — mówiąc nieco żartobliwie — będzie nasze zajęcie do końca szkoły. W tym rozdziale natomiast:

Zaczynamy od badania ruchu ciał swobodnych względem układów współrzędnych wyznaczonych przez dowolne, swobodne, wzajemnie nieruchome, ciała odniesienia

Układ współrzędnych o którym mowa w powyższym zdaniu nazywa się **inercjalnym układem odniesienia**

Nie sposób wyróżnić jeszcze prostszego przypadku ruchu. Przecież wykluczyliśmy jakiekolwiek działanie zewnętrznych czynników i na ciała odniesienia i na ciała badane! A mimo to musiały upłynąć stulecia, właściwie prawie dwa tysiąclecia od sformułowania pierwszych obserwacji dotyczących ruchu, nim doprowadzono do stanu współczesnego zrozumienia. Ptolemeusz, Arystoteles, Kopernik, Galileusz, Newton, wreszcie Einstein żyjący całkiem stosunkowo niedawno, bo w tym stuleciu, to nazwiska głównych odkrywców praw ruchu.

Wyniki obserwacji na Ziemi (w połączeniu z wyobraźnią idealizującą rzeczywistość, która nie pozwala łatwo uwolnić się od oddziaływań, także tych niechcianych), obserwacje astronomiczne, ale przede wszystkim wspaniałe sukcesy rozwiniętych dalej teorii fizycznych prowadzą do następującego aksjomatu:

Każde ciało swobodne, względem dowolnego inercjalnego układu odniesienia, porusza się jednostajnie po linii prostej.

Gdyby zapytać dlaczego tak jest, trzeba by odpowiedzieć szczerze, że nie wiadomo. Stwierdzenie o wiecznym ruchu jednostajnym ciała swobodnego (względem innych ciał swobodnych) jest wnioskiem z obserwacji świata rzeczywistego który przyjmujemy do wiadomości jako fundamentalną zasadę fizyki, zwaną zasadą bezwładności. Zasadę tę sformułował Galileusz. Newton przyjął ją jako pierwszą z zasad zbudowanej przez siebie teorii ruchu i sił. W związku z tym jest ona powszechnie znana jako pierwsza zasada dynamiki Newtona.

Mówi się popularnie że jakaś rzecz toczy się „siłą bezwładu", „siłą inercji". Mimo że słowo „siła" bywa tu używane dokładnie wbrew jego znaczeniu w fizyce[12], które niedługo poznamy, powiedzenie to trafnie odzwierciedla istotę rzeczy. Ruch jednostajny (ciała swobodnego) nie wymaga, po prostu, żadnej przyczyny. Skoro był w momencie rozpoczęcia obserwacji, będzie trwał wiecznie póki nie pojawi się przyczyna (jakieś ciało) która zacznie ten stan zmieniać.

Można zastanawiać się dlaczego taka dość prosta zasada, nie zawierająca przecież żadnych skomplikowanych zależności czy pojęć matematycznych, musiała tak długo czekać na swe odkrycie? Na przeszkodzie stało to, że w warunkach naturalnych na Ziemi, przed pojawieniem się współczesnej techniki i możliwości wręcz lotu w Kosmos, niezwykle trudno było uzyskać sytuację, by ciało rzeczywiste oddziaływało wystarczająco słabo z innymi ciałami, tak by ruch o którym mówi zasada bezwładności miał rzeczywiście miejsce. Jak zapewne dobrze rozumiecie, opory toczenia furmanki są tak duże, że gdy tylko wyprząc konia, staje ona niemal natychmiast.

Pozory były stale przeciw zasadzie bezwładności. Tzw. „zdrowy rozum" mówił, że właśnie działanie (konia) jest niezbędne dla trwania ruchu. Z punktu widzenia zasady bezwładności, koń zaledwie neutralizuje, kompensuje, oddziaływanie polegające na tarciu. Konia oczywiście widać, a tarcie jest dość abstrakcyjnym pojęciem —

[12] W języku potocznym mówi się też „siła woli", czy „siła argumentów", mimo że także i tu słowo „siła" nie odpowiada sile w fizyce. Cóż, trzeba się z tym pogodzić.

nie ma, mówiąc żartobliwie, swojego konia.

Galileusz był pierwszym, który zrozumiał (badając toczenie się kul coraz staranniej wykonanych, po coraz gładszym podłożu i obserwując słabnące efekty hamowania) że gdyby tarcie usunąć zupełnie, ciała toczyłyby się bez końca, i to ze stałą prędkością po linii prostej. Ciała w ruchu dopiero pod wpływem innych ciał hamują, przyspieszają, zakręcają.

Mając na uwadze zasadę bezwładności, powiemy że rozmaite silniki „podtrzymujące jazdę" pojazdów na Ziemi, służą tylko po to by zrekompensować, zneutralizować działanie rozmaitych oporów. (Wiadomo powszechnie, że im bardziej opływowy kształt samochodu, tym mniejsze zużycie paliwa.) W rezultacie o jadącym jednostajnie, z włączonym silnikiem samochodzie, czy pociągu, możemy myśleć raczej jak o ciele swobodnym, niż ciele napędzanym! Dlatego ciało poruszające się jednostajnie (względem układu inercjalnego), samo jest świetnym układem inercjalnym. Jeśli ciało to nie jest ewidentnie swobodne, to sądząc po jego ruchu jednostajnym, musimy uznać, że działania wszelkie na to ciało się wzajemnie znoszą.

Oczywiście hamujący pociąg czy startujący samolot są jaskrawym zaprzeczeniem takiego układu. W hamującym pociągu ciała „na które nic nie działa", które spokojnie spoczywały na półce póki pociąg jechał jednostajnie, zaczynają „szaleć" gdy gwałtownie maszynista włączy hamulce. Zaczyna się ruch względem półek, walizki spadają, ludzie nabijają sobie guzy.

Pamiętając o zasadzie bezwładności wyjątkowo łatwo to zrozumieć. Tuż przed włączeniem hamulców i wagon i walizka poruszały się jednakowo. Walizka, osłonięta przed działaniem wiatru całym wagonem w którym się znajduje, wędrowała jednostajnie, bez żadnej przyczyny, która by ją do tego zmuszała (w idealnej zgodzie z zasadą bezwładności). Wagon wędrował jednostajnie, bo lokomotywa, kompensując opór powietrza i tarcie kół, czyniła z niego ciało zachowujące się jak ciało swobodne. Ale nagle wagon zwalnia. Walizka — narazie — nie ma powodu zwalniać! W jej sytuacji, w jej sąsiedztwie nic się jeszcze nie zmieniło. Przesuwa się więc realnie względem półki (oczywiście wbrew wszędobylskiemu tarciu). Jeśli to półka nad głową pasażera siedzącego tyłem do kierunku jazdy, walizka szybko dotrze do ściany, która wytworzy, przez swą sprężystość, oddziaływanie zmuszającą walizkę do hamowania wraz z całym wagonem. Walizka na przeciwległej półce, gdy przesunie się wystarczająco, traci podparcie, spada na podłogę, i w końcu też o coś się oprze (może o nogi pasażera).

Hamujący wagon jest zaprzeczeniem układu inercjalnego. W układzie tym walizka zaczyna się poruszać bez żadnej przyczyny związanej z nią samą. Ruch ciała względem układu nieinercjalnego odzwierciedla przyczyny, działania, wywierane na układ odniesienia, a nie na ciało. To nie jest przeważnie wygodne. Dlatego dalszy opis ruchu i jego praw będziemy prowadzili w układach inercjalnych, chyba że wyraźnie to zaznaczając pozwolimy sobie na jakieś odstępstwo.

Ważną i historycznie i praktycznie sprawą jest wyjaśnienie jakim układem odniesienia, z punktu widzenia klasyfikacji: inercjalny — nieinercjalny, jest układ odniesienia wyznaczony przez ciała nieruchome względem powierzchni Ziemi. Mogą to być na przykład: róg stołu laboratoryjnego jako zerowy punkt odniesienia, i dwa inne rogi wytyczające kierunki osi zgodne z krawędziami stołu. Może to być stacja kolejowa i kierunek torów. Może to być układ wyznaczony przez obiektyw i okular teleskopu nieruchomego względem budynku obserwatorium.

Jak często w fizyce (to powoduje że niektórzy ją uważają za dyscyplinę trudną) proste pytanie wymaga złożonej, i na pierwszy rzut oka pokrętnej odpowiedzi! Zacząć powinniśmy od przypomnienia definicji układów inercjalnych. Ciała odniesienia mają być albo swobodne, albo wywierane na nie działania powinny się neutralizować, by poruszały się względem innych układów inercjalnych **jak ciała swobodne**. Każde ciało na Ziemi podlega oddziaływaniu samej Ziemi (przyciąganie) i by nie spadało, musi być solidnie podparte. Możemy więc co najwyżej rozważać, czy występujące oddziaływania właściwie się kompensują. O ile zrozumienie pojęcia ciała swobodnego i ocena czy dane ciało jest, czy nie jest swobodne, jest intuicyjnie bezproblmowe (np. oddalone znacznie od wszystkich innych ciał), to zawyrokowanie, czy ewidentnie obecne oddziaływania kompensują się czy nie, jest trudniejsze, ale też, jak się okazuje, możliwe.

Widząc, że względem układu laboratoryjnego wszystkie gwiazdy, w tym Słońce, zataczają ogromne okręgi raz na dobę, nie mamy raczej wątpliwości, że to na skutek braku ścisłej kompensacji sił grawitacji i sprężystości podłoża, nasze rogi stołu, czy luneta teleskopu, wykonują ruch niejednostajny (ciała te uczestniczą po prostu w wirowaniu Ziemi i zmieniają stale kierunek swej prędkości, powracając po 24 godzinach do pierwotnego kierunku ruchu) i nie są w związku z tym ciałami właściwymi do związania z nimi układu odniesienia. Ten fakt i podobny sposób myślenia odkrył już Kopernik.

Z drugiej strony zmiana prędkości ciała na Ziemi związana z jej obrotem dokonuje się w pełni dopiero po 24 godzinach, czyli po 86 400-tu sekundach. W trakcie eksperymentu trwającego kilka sekund (np. kamień wpada do studni) ta zmiana prędkości jest stosunkowo niewielka! Dlatego dla wielu celów praktycznych układ odniesienia nieruchomy względem Ziemi (i każdy poruszający się względem niego jednostajnie) MOżE być traktowany jak układ inercjalny.

Gdy mówimy o astronomii, Ziemia jest klasycznym przykładem układu złego, nieinercjalnego. Gdy mówimy o gwałtownie hamującym pociągu, zjawiskach na karuzeli, czy w wirówce do odciągania śmietany z mleka, Ziemia jest uosobieniem układu inercjalnego — to ona jest przeciwstawiona układowi pociągu jako ten układ prawidłowy.

Kto takiej przewrotności nie umie zaakceptować, będzie miał raczej z fizyką kłopoty, tymbardziej, że potrzeba utrzymania wypowiedzi w rozsądnych wymiarach nie pozwala bez przerwy przypominać wszystkich założeń i okoliczności w których byśmy chcieli by umieścił nasz rozmówca wypowiedziane przez nas stwierdzenie. Czytelnik, słuchacz musi nauczyć się odróżniać z kontekstu o jaki przypadek chodzi.

Kiedy mówimy że Ziemia jest punktem materialnym (mając na myśli jej prawa obiegu wokół Słońca) — mamy rację. Kiedy mówimy (rozważając ruch satelity) że jest kulą — mamy też rację. Kiedy mówimy (rozważając ruch piłki tenisowej), że Ziemia jest płaska — też mamy rację. Podobnie — w odpowiednim kontekście — jest prawdą, że układ związany z Ziemią jest inercjalny, i jest prawdą że nie jest inercjalny.

Geometryczne własności różnych ruchów, pojęcie prędkości, przyspieszenia, przebytej drogi, etc, stanowią przedmiot badań kinematyki, badanie wpływu na ruch ciała czynników zewnętrznych jest przedmiotem zainteresowania dynamiki. W następnym rozdziale zajmiemy się wprowadzeniem najważniejszych pojęć kinematyki.

2.4 Czasoprzestrzeń

Opisem położenia zajmuje się geometria. Gdy położenie ciała nie jest stałe, mówimy o ruchu. Ilościowy opis ruchu wymaga wprowadzenia pojęć nie występujących w klasycznej geometrii. Są to przede wszystkim pojęcia czasu, prędkości i przyspieszenia. Z pojęciem czasu wiąże się ściśle, ważne zwłaszcza w teorii względności, pojęcie zdarzenia.

Podobnie jak punkt w geometrii, zdarzenie jest pojęciem wyidealizowanym. W pojęciu punktu idealistyczne jest to, iż jest on „nieskończenie mały". Każdy realny przykład którym chcielibyśmy zilustrować co znaczy słowo punkt, np. ziarnko piasku, czubek szpilki, kropka postawiona długopisem, ma jakąś średnicę, nie jest dokładnie punktowy. Mimo to zyskanie poczucia iż wie się co to jest punkt, nikomu na ogół nie sprawia trudności. Przejawia się w tym elementarność pojęcia punktu. Wiemy czym on jest, mimo że ściśle nie potrafimy go zdefiniować, ani nawet wskazać doskonałego przykładu! Gdy w objętości tak małej, że uchodzi ona naszej uwadze, albo nie ma ona istotnego znaczenia, dzieje się coś krótkotrwałego, mamy do czynienia ze zdarzeniem. Włączenie na b. krótko latarki (obserwowanej z daleka), nagły rozpad jądra uranu, „odpalenie" pistoletu startowego w zawodach lekkoatletycznych — to kilka przykładów ilustrujących czym jest zdarzenie.

Zdarzeniem może być włączenie zegara (np. stopera), wskazanie przez niego 1s[13] , następnie 2s, itd. Gdy w stałej odległości

[13]Istotą zegara jest możliwość jego występowania w stanie nierównowagi. Zostawiony samemu sobie, zegar wychodzi z tego stanu i po przejściu pewnego łańcucha stanów WRACA do stanu wyjściowego. Jeśli nie ma specjalnych powodów by było akurat inaczej, taki sam stan wyjściowy powoduje wystąpienie

od tego stopera, np. 100m mamy drugi zegar wskazujący kolejno odmierzane sekundy, mamy inny ciąg zdarzeń odmienny od poprzedniego.

Jeśli pomiędzy tymi zegarami umieścić ich większą liczbę, np. co 1m, zyskujemy możliwość wskazywania innych zdarzeń przez podanie numeru zegara (pierwszemu nadajemy wartość zero, ostatniemu sto) przy którym się ono „zdarzyło" i numeru „tyknięcia" wykonanego przez ten zegar. Jeśli spacerujemy sami wzdłuż tych zegarów, i „zdarzy" nam się potknąć, to określenie gdzie i kiedy się potknęliśmy, będzie wyglądać np. tak: potknąłem się przy 15-tym zegarze, gdy wskazywał on 23-cie tyknięcie.W ten sposób zdarzeniu zostały

---

identycznego łańcucha przemian stanu i ponowne dojście do stanu wyjściowego — i tak bez końca! Ilość powrotów można zliczać i to jest zaczątek pojęcia czasu. Narazie jest to liczba całkowita, jak numer węzełka na sznurku realizującym układ współrzędnych przestrzennych. Gdyby ktoś prowokacyjnie zapytał — a skąd wiadomo że te kolejne „tyknięcia" są w równych odstępach *czasu?*. Ponieważ czas to narazie liczby kolejne tyknięć, to pytanie wydaje się bez sensu. Numery te przecież zmieniają się stale o jeden.

Ale można skonstruować zupełnie inny „zegar" i obserwować ile tyknięć tego nowego zegara przypada na jedno tyknięcie starego. Doświadczenie uczy — i jest to jak dotąd niepodważalny aksjomat — że dla dwóch zegarów spoczywających obok siebie w układzie inercjalnym — liczba ta jest stała. Jeśli na jedno tyknięcie pierwszego zegara przypada 10 tyknięć drugiego zegara, to będzie się to bez końca powtarzało. To nas zaczyna utwierdzać w poczuciu, że OBA „idą" równomiernie — cokolwiek by mogło to znaczyć. Fakt ten pozwala nadto mierzyć czas drobniejszymi, ułamkowymi miarami. Ta współbieżność niezależnych zegarów pozwala mówić o czasie, a nie o liczbie tyknięć. Pod tym względem istnieje ścisła analogia z pojęciem współrzędnej na prostej. Zaczynamy od systematycznego przykładania jakiegoś przedmiotu zostawiając znaki czy supełki — potem możemy odkładać drobniejsze przedmioty tworząc drobniejszą podziałkę, a kończymy na oderwanym pojęciu odległości. Zauważmy, że narazie to czas lokalny, odnoszący się do konkretnego zegara i ciał w jego najbliższym otoczeniu.

Pozostaje ustalić wzorzec, czyli jednostkę. Od wielu lat obowiązuje wzorzec oparty na zjawiskach atomowych. Sekunda to 9 192 631 770 okresów przejścia pomiędzy dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu 133. Liczba ta została tak dobrana, by zmierzona tym zegarem długość doby wynosiła $24 \times 60 \times 60$s, bo tak w dawnych wiekach wybrano sekundę. Z całym naciskiem trzeba tu podkreślić, że każdy człowiek chcący uprawiać fizykę, czy na Ziemi, czy na Księżycu, czy w pojeździe kosmicznym mknącym z ogromną prędkością, może mierzyć czas w tych samych jednostkach. Każdy powinien zbudować DLA SIEBIE zegar cezowy i skorzystać z powyższej definicji.

przydane dwie liczby. Każdemu innemu zdarzeniu dokonującemu się wewnątrz odcinka łączącego zegary skrajne będzie przypisana inna para liczb.

Trudno nie dostrzec ścisłej analogii między opisem punktów na płaszczyźnie („placu budowy") przez podanie numeru sznurka i numeru węzełka, a opisem zdarzenia przez podanie numeru zegara i numeru tyknięcia! Opatrując numer zegara jednostką odległości w której są te zegary dostajemy tzw. przestrzenną współrzędna zdarzenia, a opatrując liczbę „tyknięć" jednostką czasu dostaniemy tzw. współrzędną czasową zdarzenia.

Z nauki o liczbach całkowitych i ułamkach wiadomo, że i zdarzeniom dokonującym się gdzieś pomiędzy kolejnymi zegarami możemy przypisać liczby wskazujące odległość od wybranego punktu odniesienia. Gdy coś ciekawego miałoby się wydarzyć w odległości 2/5m za 91-szym zegarem[14], to i tam umieścilibyśmy zegar. Wskazanie tego stopera gdy mija go biegacz, pomniejszone o wartość wskazywaną przez zegar przy starcie w momencie startu, jest czasem biegu na sto yardów. Sam zegar jest oczywiście tak skonstruowany, że można na nim odczytać wskazania będące ułamkami sekundy.

Początek odmierzania czasu na każdym z tych zegarów musi być uzgodniony z pozostałymi. W przeciwnym wypadku posługiwanie się tymi zegarami byłoby udręką. Gdyby np. zegar na mecie, a więc ten o współrzędnej 100m był puszczony 5s później niż „normalnie", sprinter biegłby 100m podążając w jedną stronę, pozornie tylko ok. 5s, a w drugą stronę zajęłoby mu to aż 15s! Przywrócenie symetrii polegającej na tym by „tak samo" wystrzelone ciało w prawo i w lewo docierało do zegarów w jednakowej odległości o tym samym czasie na obu zegarach nazywa się synchronizacją. I znów trudno nie dostrzec ścisłej analogii z właściwym ustawieniem węzełków na sznurkach wyznaczających materialnie układ współrzędnych na płaszczyźnie.

My sami, mamy wszyscy zegarki i co jakiś czas je uzgadniamy na podstawie sygnału radiowego. Jest z tym pewien kłopot teoretyczny, bo ktoś słuchający radia daleko od Warszawy, nastawi godzinę 12:00 odrobinę już po południu. Dla Katowic np. opóź-

[14]Byłaby to odległość 100 yardów = 91,4m — dotąd występująca w sporcie w krajach anglosaskich jako odległość sprinterska.

nienie to wynosi 1/1000s i jest bez znaczenia w życiu codziennym, ale dla wielu pomiarów naukowych wymagana jest większa staranność. Chcąc mieć gwarancję, że dwa wzajemnie nieruchome zegary są zsynchronizowane (ze sobą), należałoby źródło sygnału synchronizującego, nieruchome względem tych dwóch zegarów, umieścić w połowie odległości między nimi.

W praktyce nie trzeba umieszczać zegarów we wszystkich możliwych miejscach, ale dobrze wiedzieć, że zawsze to można zrobić w miarę potrzeby. Wskazania takich wzajemnie zsynchronizowanych, nieruchomych zegarów definiują jedną z najważniejszych wielkości fiycznych, mianowicie CZAS. Sam zbiór zegarów stanowi konkretyzację układu odniesienia. Czas ten odnosi się do tego układu odniesienia w którym użyte zegary spoczywają.

> Fizyczne dwa zegary potrzebne do pomiaru prędkości na pewnym odcinku mogą być zastąpione jednym, jeśli na starcie i na mecie umieścimy czujniki wytwarzające impulsy elektryczne gdy mije je badane ciało, przesyłane następnie do JEDNEGO zegara. Zegar pozwala odpowiedzieć na pytanie o ile później drugi impuls dotarł do zegara po pierwszym impulsie, (czyli jaki był czas przelotu badanego ciała między końcami odcinka). W tym wypadku musimy zadbać o IDENTYCZNOŚĆ kabli przenoszących impulsy od czujników do zegara. Nie jest to problem błachy, bo cząstki badane przez fizyków przebywają mierzony dystans w czasie porównywalnym z czasem wędrówki impulsu. Staranność jest tu konieczna.
>
> Identyczność kabli jest dokładnym odpowiednikiem synchronizacji. Jej gwarancją jest symetria, identyczność. Kupując kable w renomowanej firmie powinniśmy je mieć jednakowe. Zgodnie z powiedzeniem, że kontrola jest lepsza niż zaufanie, na wszelki wypadek sprawdzamy te kable, np zamieniając miejscami, i powtarzając pomiar z identycznie rozpędzoną drugą cząstką. Powinniśmy dostać to samo. (Podobnie sprawdza się rzetelność wagi zamieniając miejscami odważniki i ciało ważone.).
>
> Pojęcie synchronizacji oparte na symetrii jest pojęciem pierwotnym, oczywistym dla zegarów spoczywających w pewnym inercjalnym układzie odniesienia, nie wymagającym

> dalszych deliberacji. Wbrew wielu książkom, spełnienie warunku synchronizacji nie wymaga, nie musi się w żadnym stopniu opierać, na specyficznych własnościach światła.

Ważne jest zrozumieć, że tak jak na płaszczyźnie euklidesowej nie istnieje bezwzględne pojęcie współrzędnej y, (czy x), nawet po ustaleniu początku układu, a przed poprowadzeniem konkretnej rodziny sznurków, tak zdarzenie NIE MA absolutnie określonego czasu (nawet po wyborze zdarzenia któremu przypisujemy współrzędną (0,0)) przed wybraniem konkretnej rodziny wzajemnie nieruchomych zegarów. Tym samym odstęp czasu musimy uznać za wielkość względną. Względem jednego układu inercjalnego i spoczywających w nim zegarów dane zdarzenie może być późniejsze od zdarzenia odniesienia o 5s, w innym np. o 4s ! Oczywiście zegary w obu układach są identycznie skonstruowane i tak samo zdefiniowana jest sekunda.

Przez stulecia ludzie wyobrażali sobie, że czas biegnie sobie „sam z siebie", jeden dla całego Kosmosu, jeden dla wszystkich obserwatorów — i tych w laboratorium na Ziemi, i tych w podróży kosmicznej. Jeden dla jądra uranu w spoczynku, i ten sam dla jądra sztucznie rozpędzoego. Zegary, jak się wydawało, służyć miały tylko jego pomiarowi.

Tymczasem realnie istnieją zdarzenia, przypisanie im pary liczb — numeru zegara i numeru „tyknięcia" — jest jakby sposobem pewnego ich ponazywania, sposobem jednym z wielu możliwych. Przy pomocy drugiej rodziny zegarów — też wzajemnie nieruchomych, ale będących w ruchu w stosunku do poprzedniej rodziny — możemy określić nowe „nazwy" tych samych zdarzeń. W tych „nowych nazwach" *oba składniki* — i współrzędna przestrzenna, i współrzędna czasowa są, na ogół inne. Nie jest to nic tajemniczego.

Rozpatrzmy pociąg ekspresowy, w nim wagon restauracyjny. Na każdym stoliku zegar. I mamy też zegary na każdej kolejnej stacji. Te dwie rodziny, to dwa układy inercjalne (rozpatrujemy tylko okres jednostajnego ruchu pociągu). W wagonie do obiadu usiadł pasażer. Jest to zdarzenie. Możemy wyobrazić sobie że się tak złożyło że zegar przy stoliku pokazywał akurat godzinę 0, akurat tyle samo co zegar na mijanej właśnie stacji. Zegarowi przy stoliku przy którym jedzony jest ten obiad nadajmy numer zero, i taki sam numer (położenie) zero przypiszmy w układzie torów kolejowych zegarowi na mijanej stacji.

Przełknięcie ostatniego łyku deseru to też zdarzenie. Według kelnera w wagonie, zdarzenie to ma współrzędną zero (pasażer się wszak nie przesiadał), a zegar przy stoliku pokazuje, np. $t' = 40$min $= 2400$s. Kolejarz na stacji, przez którą przejeżdża ekspres bez zatrzymywania, obserwujący akurat koniec obiadu przez szybę wagonu powie, że ma to zdarzenie współrzędną o wartości zdecydowanie innej, np. $x = 80$km $= 80\,000$m (jeśli tyle przejechał pociąg w trakcie pobytu pasażera w wagonie restauracyjnym), a zegar na nowej mijanej stacji pokaże wartość t, no właśnie, ale ile ona wyniesie?

Powyższy problem jest jednym z najważniejszych jakie postawiono i rozwiązano w naszym stuleciu w związku z zagadnieniem ruchu. Do zagadnień tych powrócimy nieco dalej, tu podamy narazie tylko rezultat:

$$t = \sqrt{t'^2 + 0,000000000000000011 x^2} = 2400\text{s} + 0,000000000000006\text{s}$$

Jest to tylko 6 trylionowych sekundy więcej, nic dziwnego iż długie lata tego nie zauważano. Gdyby odległość x w powyższym wyrażeniu była dużo, dużo większa, różnica wskazań zegarów byłaby duża i znacząca. Duże x przy danym czasie byłoby osiągnięte, gdyby pociąg pędził z prędkością ogromną — dużo, dużo większą niż w powyższym przykładzie.

> Przykład z pociągiem wcale nie musi być traktowany z przymrużeniem oka! Już w latach siedemdziesiątych wykonano eksperyment z bardzo dokładnym zegarem, tego typu który służy do najdokładniejszego definiowania sekundy, polegający na przewiezieniu go dookoła świata samolotem zwykłych linii lotniczych. Po powrocie do laboratorium i porównaniu z bliźniaczym zegarem pozostającym cały czas w laboratorium stwierdzono wyraźną różnicę wskazań większą od dokładności samych zegarów i całkowicie zgodną z powyższym wzorem. Był to najtańszy eksperyment potwierdzający teorię względności Einsteina!

Jądra atomowe, czy tymbardziej cząstki elementarne, potrafią pędzić nawet i z prędkością 299 792 000 m/s, dla nich różnice te stają się bardzo ważne. Ich uwzględnienie jest niezbędne do zrozumienia wielu zjawisk, między innymi takich jak świecenie gwiazd, czy wybuch bomby atomowej.

Informacja o innym wskazaniu zegara wędrującego względem pewnej rodziny zegarów, mimo wyboru identycznej jednostki czasu i tego samego początku liczenia, może wydawać się szokująca, rodzić pewien bunt. Wydaje się sprzeczna z codziennym doświadczeniem. Ponieważ jest to zagadnienie kluczowe dla zrozumienia fizyki, pozwolimy tu sobie podać przykład, nieco bajkowy, ilustrujący ten konflikt intuicji i faktów.

Wyobraźmy sobie osadę naszych przodków, położoną gdzieś w środkowej Polsce, przed kilkunastoma wiekami. Mieszkańcy osady organizowali coroczne wyprawy po bursztyn. Szli według zasady takiej, by mieć o wschodzie Słońce po prawej stronie, o zachodzie po lewej. Nad samym morzem w dogodnym miejscu trzymali niektóre narzędzia, by nie nosić ich stale ze sobą.

Jasne jest, że kierując się na północ bez żadnych przyrządów, nie trafiali nigdy dokładnie do swojej bazy. Po dojściu do brzegu musieli iść w lewo, albo w prawo, a to tysiąc, a to sześćset, a to półtora tysiąca kroków. Wcale ich to nie dziwiło.

NIE DZIWIŁO ICH TEŻ, ŻE ZAWSZE SZLI 10 DNI.

To był fakt, aksjomat, zasada. DO MORZA JEST 10 DNI DROGI. Czy w danym roku trafiono na bazę idealnie, czy nie, do brzegu szli 10 dni. I już.

Pomyślmy o jakimś uczestniku wyprawy, który dostrzegł w tej zasadzie coś dziwnego, coś niepokojącego. Mógł on wysuwać różne hipotezy racjonalizujące ten wynik. Po pierwsze mógł sobie wyobrazić, że brzeg Bałtyku jest wypukły, jest kawałkiem łuku okręgu, a ich osada przypadkowo leży w środku tego okręgu. Po drugie mógł przypuszczać, że świat w którym żyje jest taki, że przy takim samym wysiłku, kroki stawiane na północny zachód, czy północny wschód, są nieco większe, i w efekcie dłuższą drogę przy niedokładnym wychodzeniu na bazę pokonuje się w tym samym czasie (i tą samą liczbą kroków). A po trzecie, mógł przypuścić, że naprawdę, za każdym razem oni NIE idą jednakowo długo, ale różnice są nieuchwytnie małe, po prostu ich nie zauważają.

Ty Czytelniku żyjesz półtora tysiąca lat później, uczyłeś się geometrii, znasz twierdzenie Pitagorasa. Sprawdź, że przy odległości 300 000 kroków od osady do brzegu, zboczenie o 1 000 kroków od linii prostopadłej do brzegu, wydłuża trasę o PÓŁTORA zaledwie kroku, co zajmuje dodatkowo niecałą sekundę marszu, nijak w rozpatrywanych okolicznościach niezuważalną!. Ale małość tego efektu nie sugeruje by nie uczyć się geometrii!!

Gdyby z centralnej Polski trzeba iść po bursztyn w okolice Szczecina, nie Rozewia, napewno 10 dni by nie starczyło.

A na czym polega analogia z zegarami? Co jest odpowiednikiem osady, a co linii wybrzeża? Otóż zdarzenie polegające na tym, że o 12:00 jestem na dworcu w Warszawie, to pewien punkt w czasoprzestrzeni. „Linia brzegu” ma swój odpowiednik w następującej linii zdarzeń (podajemy kilka punktów na tej linii): dworzec w Warszawie o godz. 15:00 (według zegara dworcowego), dworzec w Koluszkach o godz. 15:00 (według zegara dworcowego w Koluszkach, zsynchronizowanego z zegarem w Warszawie), dworzec w Katowicach o godz. 15:00, lotnisko w Rzymie o godz. 15:00 (według zegara w Rzymie zsynchronizowanego z zegarami dotychczas wymienionymi), itp.

I teraz ja, świadomym wyborem, mogę zdecydować gdzie chcę przeciąć tę linię. Jeśli w Warszawie, to wystarczy trwać na dworcu. Jeśli w Koluszkach, to muszę wsiąść do pociągu osobowego. Jeśli w Katowicach, to muszę wsiąść do pociągu ekspresowego. Mogę spotkać tę linię i w Rzymie, jeśli wsiądę w samolot. Fakt, że W PRAKTYCE, na zegarku ręcznym za 15 zł, nie dostrzegnę różnic jego wskazań po przybyciu do celu w tych różnych przypadkach, nie oznacza że ich nie ma! Należy się dziwić (jak z tym bursztynem), że nasz zegarek za każdym razem pokazuje godz. 15:00!

Gdybym zdecydował się być o 15:00 (ale nie na swoim zegarku, lecz na zegarze nieruchomym względem dotychczas rozpatrywanych, prawidłowo z nimi zsynchronizowanym) trzy miliardy kilometrów od Warszawy, wtedy różnica byłaby ogromna. Dopiero ten punkt czasoprzestrzeni byłby jak Szczecin w bajce o zbieraczach bursztynu. Inna sprawa, że bardzo trudno człowiekowi by było być najpierw o 12:00 w Warszawie, a o 15:00 już na peryferiach Układu Słonecznego. Ale to nie powód by nie uczyć się kinematyki!!!

Fragmenty jądra uranu bo wybuchu bomby latają szybko. By zrozumieć co się dzieje musimy zająć się różnicami upływu czasu, które w innych sytuacjach są śmiesznie małe, jak owe półtora kroku dla poszukiwaczy bursztynu.

Obiecując sobie powrócić do tych ciekawych zagadnień, obecnie będziemy się uczyli fizyki takiej, jaką postrzegali i zbudowali jej pierwsi twórcy, od Galileusza i Newtona do Avogadry, Kelvina, Maxwella i Boltzmana. Obejmuje to okres od końca 16-tego do końca 19-tego stulecia. Badając ruchy niezbyt szybkie nie byli oni w stanie zauważyć różnic wskazań zegarów w ruchu i przyjmowali bez zastrzeżeń, że zegary we względnym ruchu, gdy się mijają pokazują jednakową liczbę „tyknięć”. Pozory świadczą więc o uniwersalności czasu, jego niezależności od układu odniesienia. Pamiętajmy że absolutność ta wcale nie jest oczywista, jest jedynie dobrym przybliżeniem dla stosunkowo niewielkich prędkości.

2.5 Prędkość, przyspieszenie

Wiedząc jak mierzyć odległości i czas na zsynchronizowanych zegarach możemy określić prędkość. Nie ma chyba nikogo kto nie podróżowałby pociągiem, samochodem, rowerem, czy chociaż nie chodził na własnych nogach, by nie wiedział co to znaczy przemieszczać się prędko, czy powoli! Gdy poruszamy się, (lub gdy porusza się rozpatrywane ciało) jednakowo szybko, im dalej jesteśmy, tym proporcjonalnie więcej pokazuje kolejny mijany zegar układu do którego odnosimy ruch. Mówimy że przebyta odległość (droga) jest proporcjonalna do czasu trwania ruchu. W ciągu sekundy przebywamy np. 5m, w ciągu dwóch sekund 10m, w ciągu 10 sekund 50m itd. Zależność tę moglibyśmy opisać wzorem:

$$s = 5t$$

w którym s to przebyta droga, t czas pokazywany przez zegar odległy o s od miejsca gdzie rozpoczęłśmy obserwację ruchu (w każdym razie chodzi o miejsce od którego zajęliśmy się pomiarem prędkości).

Taka postać opisu ruchu nie byłaby wygodna. Załóżmy bowiem, że chcemy ustalić gdzie będziemy w tym ruchu po kwadransie, czyli po 15-tu minutach. Gdy podstawimy „z rozpędu" liczbę 15 do powyższego wzoru wyjdzie nam 75. Ale przecież 15 minut to aż 900 sekund. Podstawiając $t = 900$ dostaniemy $s = 4500$. A to ogromna różnica.

Wzór fizyczny, taki jak $s = 5t$, zawierający *tylko liczby* skazywałby nas na poługiwanie się zawsze, bez wyjątku i przez wszystkich tymi samymi jednostkami, w tym wypadku odległości i czasu. Chociaż dążenie do ujednolicenia rozmaitych miar jest stałą tendencją i kupców i fizyków i inżynierów, nadmierny rygoryzm w tym względzie byłby nieroztropny. Nawet w ramach tzw. międzynarodowego systemu jednostek SI, wolno używać obok jednostek podstawowych — ich wielokrotności i podwielokrotności. A więc używamy metrów określając prędkość sprintera, czy piłki tenisowej, ale kilometrów gdy jedziemy samochodem. Podobnie naturalne jest[15] używanie i sekund i godzin do wyrażania okresu czasu.

Z tego powodu wielkość fizyczna jest czymś więcej niż liczbą, tak jak określają ją matematycy. Odległość 5m składa się — jak widzimy — z dwóch elementów: liczby 5 i *jednostki*, w tym przykładzie — metra. Tę samą odległość możemy przedstawić jako 500 cm, lub 5 000 mm itd. Zmianie jednostki musi towarzyszyć zmiana mnożącej ją liczby. Wtedy zamiana jest uprawniona, a opisywana wielkość się nie zmienia: 5m = 500cm.

Wzory fizyczne zawierają nie tylko liczby opisujące te wielkości w danych jednostkach, ale także i te jednostki. W dalszym ciągu litera t **nie będzie samą liczbą**, tak jak liczby rozumieją matematycy, lecz liczbą uzupełnioną nazwą jednostek. Nie pozwolimy sobie pisać $t = 5$ (o ile t ma reprezentować czas). Możemy napisać

[15] Jest naturalne posługiwanie się i sekundami i godzinami, skoro takie jednostki są w użyciu. Nie jest natomiast za bardzo naturalne, że godzina dzieli się na 3 600 sekund. To niewątpliwie archaiczna spuścizna dawnych kultur, co najmniej babilońskiej. Próby racjonalizacji podziału doby opartego na podstawie dziesiętnej liczenia jak dotąd się nie powiodły.

$t = 10$s. Podobnie wynik obliczania drogi musi być *odległością*, a nie liczbą. Może to być 50m, ale nie 50!

Po to by wstawienie wielkości czasu dało wielkość drogi, nasz wzór w rozpatrywanym przykładzie musi być:

$$s = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t$$

Podstawienie 900s w miejsce t pozwoli „skrócić" przez sekundy i po wykonaniu mnożenia 5×900 dostaniemy 4 500 m. Gdy jednak podstawimy $t = 15$min, dostaniemy $75\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times$min i widzimy wyraźnie że to jeszcze nie koniec obliczeń. Dopiero zastępując jednostkę min w liczniku przez 60s uzyskamy możliwość redukcji jednostek czasu, ale towarzyszyć temu będzie pomnożenie pierwszego rezultatu 75 przez liczbę 60, co ponownie da prawidłowy wynik 4 500m.

Ów współczynnik 5m/s z naszego przykładu jest prędkością. Prędkość jest wielkością *mianowaną* — liczbie towarzyszy ułamek w którego liczniku jest jednostka odległości, w mianowniku jednostka czasu. Oznaczając prędkość literą v napiszemy ogólną zależność przebytej drogi od czasu w ruchu jednostajnym w postaci:

$$s = vt$$

Gdy chcemy określić prędkość konkretnego ruchu możemy przekształcić powyższy wzór do postaci: $v = s/t$ przekonując się iż prędkość to iloraz przebytej drogi i czasu trwania ruchu.

W tym prostym przypadku ruchu jednostajnego warto zwrócić uwagę na jedną okoliczność. Otóż dla obliczenia prędkości ruchu nie jest konieczna znajomość *całej* przebytej drogi i *całkowitego* czasu trwania ruchu. Wystarczy wybrać jakiś — nawet krótki — fragment odcinka po którym odbywa się ruch i podzielić długość *tego* odcinka przez różnicę wskazań zegarów znajdujących się na końcach odcinka gdy ciało mija kolejno każdy z nich.

Chociaż może się to wydawać wyważaniem otwartych drzwi sprawdźmy że tak jest istotnie. Punkt wybrany jako początek odcinka kontrolnego ma współrzędną s_1 i jest mijany w chwili t_1. Podobnie koniec ma współrzędną s_2 i mijany jest w chwili t_2. Dla każdego z tych punktów mamy:

$$s_1 = vt_1, \quad s_2 = vt_2$$

Odejmując stronami dostajemy: $s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$, czyli:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Różnica $s_2 - s_1$ może być wyliczona gdy znane jest i s_1 i s_2, ale może też być wyznaczona wprost w terenie bez informacji gdzie był prawdziwy początek wędrówki! Podobnie z czasem. Oznaczamy te *przyrosty*, jak je nazywamy, symbolami Δs i Δt. Czasami zamiast litery greckiej stosuje się małą literę łacińską odpowiadającą greckiej delcie, a więc d. Łacińskie słowo *differenza*, różnica, jest źródłem owego oznaczenia. Przyrosty są to przecież różnice wartości w dwóch kolejnych fazach ruchu.

Jakkolwiek dziwne się to może wydawać, do wyznaczenia prędkości samochodu, teoretycznie biorąc, wystarczyłoby zmierzyć czas jego przejazdu przez odcinek 1mm. Gdyby okazał się on równy 25μs, czyli 25 mikrosekund, moglibyśmy łatwo wyliczyć — w normalnych dla jazdy samochodem jednostkach — że to aż 144km/godz.

Dla ugruntowania tych oczywistości przytoczmy anegdotę o kierowcy zatrzymanym przez policjanta za przekroczenie dozwolonej prędkości:

- Płaci Pan mandat. Jechał Pan 120 kilometrów na godzinę.

- Ależ Panie Władzo, dopiero 3 minuty temu wyjechałem z domu, jaką znów godzinę.

- Nie twierdzę że Pan jechał godzinę, ale jadąc tak samo dalej, przez godzinę *przejechałby* Pan 120 km.

- Jadąc tak samo, trafiłbym kilometr dalej na wymarzoną plażę, tylko 7km od mojego domu, napewno nie przejechałbym dziś 120km!

Jest oczywiste, że radarowa kontrola prędkości samochodów wymaga bardzo krótkiego czasu pomiaru, a więc i czasu trwania fragmentu ruchu, niezbędnego zaledwie na odbicie impulsu radarowego — w tym czasie samochód nie przejedzie nawet milimetra!

Jeśli chwilę pomyśleć, to łatwo dojść do wniosku, że dla pomiarów dokonywanych na bardzo krótkim odcinku, zupełnie nie ma znaczenia, czy ruch przed pomiarem był jednostajny, czy nie. Ba, nawet w czasie radarowego „błysku” kierowca mógł, zauważywszy kontrolę drogową, trzymać już nogę na hamulcu z nadzieją, że zdoła obronić się przed mandatem.

Prędkość jest własnością ruchu w jednym konkretnym punkcie. Jest to oczywiste, gdy odczytujemy ją na szybkościomierzu. W trakcie rozpędzania samochodu, czy w trakcie hamowania, strzałka szybkościomierza pełznie po tarczy wskazując w każdej kolejnej chwili inną wartość. Radar zmierzy tę wartość, którą akurat pokazuje szybkościomierz, gdy impuls radarowy odbija się od karoserii.

Problem prędkości w ruchu niejednostajnym długo sprawiał kłopoty badaczom. Właściwie zrozumiał go dopiero Newton! Stworzył on wręcz nowy dział matematyki, zwany dzisiaj rachunkiem różniczkowym. Poznacie go dokładniej w dalszych latach nauki, tutaj zapoznamy się z najprostszą ideą tego rachunku, umożliwiającą badanie ruchu zmiennego.

Rozpatrywaliśmy powyżej ruch w którym odległość rosła równomiernie z upływem czasu: $s = vt$. Najprostszą do pomyślenia zależnością inną niż ta zawierająca pierwszą potęgę czasu t jest zależność od drugiej potęgi czasu. Oznaczając możliwy współczynnik proporcjonalności literą b zbadajmy ruch w którym:

$$s = bt^2$$

Jak zobaczymy, jest to bardzo pospolity przypadek.

Dzieląc drogę przebytą między chwilami t i $t + \Delta t$, przez czas jaki upłynął, obliczmy, co uzyska obserwator mierzący prędkość. Obserwator nie musi wiedzieć, czy ruch jest jednostajny, czy nie. Długość odcinka przebytego między chwilami t i $t + \Delta t$ jest różnicą odległości s_2 przebytej do momentu $t + \Delta t$ i mniejszej drogi s_1 przebytej do chwili t. Dla ruchu zachodzącego zgodnie z hipotetyczną zależnością: $s = bt^2$ mamy:

$$s_2 = b(t + \Delta t)^2, \qquad s_1 = bt^2$$

Iloraz przebytej drogi $\Delta s = s_2 - s_1$ i czasu Δt wynosi:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{b(t + \Delta t)^2 - bt^2}{\Delta t} = b\frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2bt + b\Delta t$$

Wynik ostatecznie ma dwa składniki: pierwszy $2bt$ niezależny od długości przedziału w którym dokonywany jest pomiar, a jedynie od chwili początkowej, i drugi: $b\Delta t$. Jeśli przedział wybrany do pomiaru jest bardzo krótki, ten drugi człon jest bardzo mały. Uzyskany wynik sprowadzi się w praktyce do wartości $2bt$. Jest to owa prędkość chwilowa pokazywana przez szybkościomierz samochodu, właśnie w chwili t.

Jeśli pomiar dokonamy na dość długim odcinku, na którym ciało tylko na samym początku ma prędkość $2bt$, a potem systematycznie coraz większą, dostaniemy oczywiście więcej, wynik pośredni między początkową prędkością najmniejszą, a końcową, która w czasie $t + \Delta t$, osiągnie już wartość $2b(t + \Delta t)$.

Stwierdzamy więc, że prędkością chwilową, właściwą dla czasu t, jest $v(t) = 2bt$. Pojawiająca się dwójka wprowadza nieco zamieszania. Jeśli w wyrażeniu na drogę współczynnik przy b jest 1, to w wyrażeniu na prędkość mamy czynnik 2. Możemy jednak, jak narazie niesprecyzowaną co do konkretnej wartości, wielkość b oznaczyć jako $a/2$, a więc $2b$ zastapić przez a otrzymując dla zbadanej postaci ruchu:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = at$$

Drugi z wzorów mówi nam, że pędkość w tym ruchu wzrasta proporcjonalnie do czasu. Ruch nazywa się w związku z tym *ruchem jednostajnie przyspieszonym*, a dokładniej ruchem jednostajnie przyspieszonym *bez prędkości początkowej*, jako że prędkość w tym ruchu, obliczona dla chwili początkowej $t = 0$ wynosi istotnie 0. Wielkość a nazywa się *przyspieszeniem*. Jej jednostką jest metr na sekundę na sekundę, w skrócie zwaną metr na sekundę kwadrat, a jej sens polega na tym, że odpowiada na pytanie o ile prędkość w ruchu z takim przyspieszeniem wzrasta w ciągu jednej sekundy. Oznaczenie a nie jest przypadkowe, pochodzi z łacińskiego *acceleratio* oznaczającego właśnie przyspieszenie. Słowo to zresztą powinno być znane Polakowi, nawet gdy nie zna on łaciny. Przecież i u nas się mówi o „pedale akceleratora” w samochodzie. Znana jest również nazwa akcelerator cząstek elementarnych.

Dla zastosowań praktycznych ważny jest przypadek z prędkością początkową różną od zera. W tym celu obliczmy prędkość chwilową w ruchu opisanym zależnością: $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Przebyta droga wyrażona jest jako suma dwóch składników. Przy obliczaniu prędkości metodą dzielenia przyrostu drogi przez przyrost czasu dostaniemy oczywiście:

$$v_0 + at + \frac{1}{2}a\Delta t$$

czyli sumę tego co byśmy dostali dla ruchu jednostajnego i tego co dla ruchu przyspieszonego bez prędkości początkowej. Z powodów omówionych w poprzednim przypadku, teraz też kładziemy ostatecznie długość przedziału Δt równą zeru, otrzymując dla ruchu jednostajnie przyspieszonego, z dowolną prędkością początkową:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Położenie ciała może wyrażać się zarówno dodatnią, jak i ujemną liczbą jednostek. W związku z tym — w zależności od kierunku ruchu — prędkość, czy to początkowa, czy chwilowa, może być zarówno dodatnia, jak ujemna. Dowolny może też być, w ogólności, znak przyspieszenia. W mowie potocznej nie używa się słowa „przyspieszenie" gdy jego znak jest przeciwny do aktualnej prędkości, czyli gdy wartość bezwzględna prędkości maleje. Mówi się wtedy o hamowaniu, lub ruchu *opóźnionym*. Według nas nie jest to specjalnie polecane. Niech termin opóźniony pozostanie terminem mowy potoczej — poza lekcjami fizyki. Za to nie powinno nas dziwić, że przyspieszenie może być ujemne i że prędkość w ruchu przyspieszonym może maleć.

Oprócz prędkości chwilowej omówionej i przedyskutowanej powyżej dla ruchu zmiennego, wprowadza się, znane i z życia codziennego, pojęcie prędkości średniej. Gdy mówimy że ekspres z Warszawy do Katowic jedzie z prędkością średnią 100km/godz, mamy na myśli to, że całą trasę 300km pokonuje on w trzy godziny. Ruch pociągu nie jest naturalnie jednostajny. Zatrzymuje się on na paru stacjach, zwalnia na łukach torów, czy jadąc przez tereny szkód górniczych, gdzie jego prędkość chwilowa bywa grubo poniżej 100 km/godz. Ale na niektórych odcinkach pędzi on 160 km/godz, albo i więcej. Wszystkie te szczegóły nie są do wywnioskowania z samej tylko wartości średniej. Dla kolejarza informacja o średniej, to zdecydowanie za mało. Ale dla pasażera, praktycznie nic innego nie odgrywa roli. Ze znajomości średniej i godziny odjazdu, może on wywnioskować o chwili przybycia do celu.

Mierząc czas potrzebny do przebycia odcinka Δs, i dzieląc drogę przez czas potrzebny na jego przebycie, wyznaczaliśmy w istocie prędkość średnią dla tego odcinka. Im krótszy badany odcinek, tym bliższa jest wartość średnia wartości chwilowej.

Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego możliwe jest obliczenie prędkości średniej dla dowolnego odcinka, i wyrażenie jej przez prędkości na początku i na końcu odcinka. Rezultat bywa użyteczny przy rozwiązywaniu wielu zadań.

Zaczynamy od podzielenia całej drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym przez czas t:

$$v_{\text{śr}} = \frac{s}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + \frac{1}{2}at$$

Doprowadzając do wspólnego mianownika dostajemy:

$$v_{\text{śr}} = \frac{2v_0 + at}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = \frac{v_0 + v_{\text{k}}}{2}$$

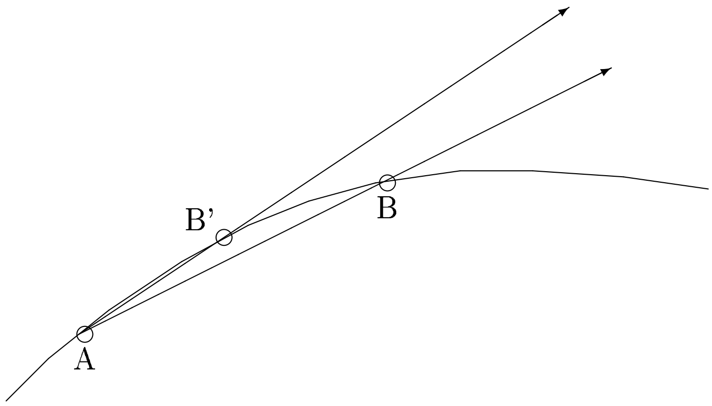
gdzie prędkość końcową $v_0 + at$ oznaczyliśmy symbolem v_{k}.

Uzyskaliśmy łatwy do zapamiętania rezultat, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość średnia na odcinku, równa jest średniej arytmetycznej prędkości początkowej i końcowej.

Nie powinna nas zwieść pozorna oczywistość tego rezultatu. Dla ruchów inaczej zmiennych niż jednostajnie, prędkość średnia arytmetyczna nie jest na ogół poprawną wartością średnią. Sprawdź, wzorując się na rozważaniach dla ruchu opisanego wzorem $s = bt^2$, że dla ruchu $s = ct^3$, prędkość chwilowa wynosi $v = 3ct^2$. Prędkość średnia w tym ruchu wynosi $v_{\text{śr}} = s/t = ct^2 = (0 + v_{\text{k}})/3$ — nie jest więc, jak widać, średnią arytmetyczną prędkości początkowej i końcowej.

2.6 Ruchy na płaszczyźnie

Rzadko kiedy ruch ciała odbywa się wzdłuż prostej. Zastanawiając się nad pojęciem prędkości zauważamy, że wielkość ta ma ściśle określony sens także wtedy, gdy ruch odbywa się wzdłuż linii krzywej. Przecież dostatecznie krótki łuk krzywej (Przypomnijmy sobie „pomylenie” łuków kół na powierzchni Ziemi z odcinkami prostoliniowymi, gdy jeszcze nie wiedziano o kulistości Ziemi) coraz trudniej odróżnić od odcinka. Popatrzmy zresztą na rysunek:



Wektor o kierunku AB i wartości $AB/\Delta t$ jest prędkością średnią na łuku AB. Gdy łuk bierzemy coraz krótszy (AB'), kierunek tej prędkości staje się nieodróżnialny od kierunku stycznej. Tym samym widzimy, że prędkość chwilowa w ruchu po krzywej jest wektorem stycznym do linii po której porusza się punkt. Sama wartość prędkości pozostaje tym samym co w ruchu prostoliniowym, mianowicie stosunkiem przebytej drogi do czasu w którym się to stało. Wartość prędkości nazywa się też *szybkością*. Gdy punkt nie tylko porusza się po krzywej (co oznacza zmianę kierunku wektora prędkości), ale i gdy jego szybkość nie jest stała, przy określaniu szybkości chwilowej należy postąpić w znany już nam sposób, czyli obrać jak najkrótszy przedział w którym prędkość średnią wyznaczamy.

Powyższe określenie prędkości w ruchu na płaszczyźnie zostało zrobione w sposób bezpośredni, niemal przez pokazywanie palcem. Ciekawe możliwości badania prędkości w takim ruchu daje użycie współrzędnych.

Nim przejdziemy do określenia współrzędnych wektora prędkości, wprowadzimy pewną modyfikację poznanego wcześniej pojęcia wersora. Kiedy piszemy dla składowej wektora wodzącego $x\vec{\imath}$ iloczyn współrzędnej i wersora, musimy zdecydować która z tych wielkości ma pamiętać że używamy akurat metrów, a nie yardów czy cali. Możnaby przyjąć że wersor $\vec{\imath}$ ma długość 1m, a współrzędna jest „liczbą czystą", bezwymiarową, ale wygodniej jest by miano było przypisane współrzędnej. Ale wtedy $\vec{\imath}$ nie może mieć długości 1m, bo było by tych metrów za dużo! On musi być bezwymiarowy. Tym samym jego funkcją jest już tylko pokazywanie kierunku. Nie da się wskazać gdzie leży koniec wersora, nawet gdy ustalimy jego początek w początku układu! W realnej przestrzeni punkt musiałby być odległy o np. 1m, ale nie o JEDEN. Powyższe „oczyszczenie" wersora z miana jednostki długości jest bardzo użyteczne. Mnożąc taki wersor przez wielkość o wymiarze prędkości dostajemy wektor prędkości. Wielkość $v_x\vec{\imath}$ oznacza nic innego jak wektor prędkości skierowany wzdłuż osi X i wartości v_x. Jeżeli położenie na płaszczyźnie opisywane jest zależnymi od czasu współrzędnymi:

$$r\vec{(t)} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

to wektor prędkości określony zwyczajnie jako iloraz przemieszczenia $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ i czasu Δt może być przekształcony do postaci:

$$\vec{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{\jmath}$$

W zależności od tego co wiemy o zmianach współrzędnych x i y w czasie, i w zależności od tego czy interesuje nas prędkość średnia czy chwilowa, postępujemy dalej z ułamkami w powyższym wyrażeniu identycznie jak postępowaliśmy w przypadku ruchu po każdej z prostych X i Y.

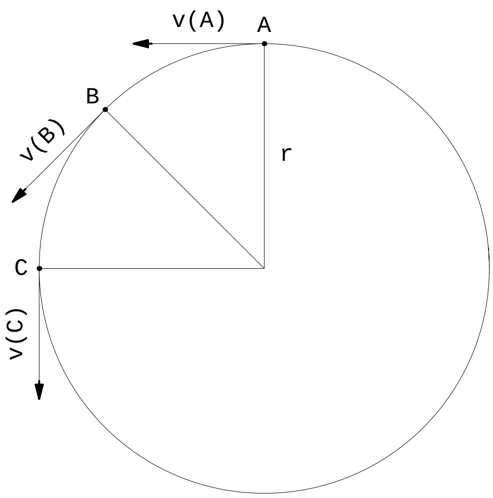
Wprowadzenie układu współrzędnych jakby rozkłada ruch w płaszczyźnie na dwa pomocnicze ruchy: $x(t)$ i $y(t)$, każdy po „swojej" prostej. W każdym z tych ruchów nauczyliśmy się określać prędkość (i przyspieszenie). Wykazaliśmy że po złożeniu tych prędkości w jedną wielkość dostajemy prawdziwą prędkość ruchu. Jest oczywiste, że dotyczy to także przyspieszenia.

Tajemnicze zniknięcie wersora ze zwykłej przestrzeni staje się bardziej zrozumiałe w stosowanym najczęściej zapisie wektorów, szczególnie praktycznym gdy nie zmieniamy co chwilę osi współrzędnych, lecz mamy je ustalone. Powtarzanie wtedy we wszystkich możliwych wzorach symboli wersorów jest i męczące i jałowe. Wystarczy się umówić, że pierwsza wymieniona liczba będzie współrzędną x-ową, a druga y-kową. Ponadto obejmujemy listę współrzędnych nawiasami. Możemy więc pisać: $\vec{r} = (x, y)$. Podobnie $\vec{v} = (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t})$. Bardzo proste!

A co z wersorami? Też proste. Mamy $\vec{\imath} = (1, 0)$ i $\vec{\jmath} = (0, 1)$. Nie możemy wersora narysować (nie jest znana jego długość w żadnym układzie jednostek!), ale możemy go chociaż zapisać. To że w nawiasie są liczby bezwymiarowe bierze się stąd że „ogołociliśmy" wersor ze zwykłej długości. Wersor jest jakby „miejscem" do wpisania odpowiedniej wielkości fizycznej. Wpisać można odległość, prędkość, natężenie pola elektrycznego, itd, itd.

Jest ponadto oczywiste, że w zwykłej „prawdziwej" przestrzeni można umieścić strzałkę tylko wektorów położenia. Tworząc rysunek jakiejś rzeczywistości wprowadzamy zwykle jakąś skalę i na rysunku takim wektor realny będzie stosownie skrócony. Inne wektory też często przedstawiamy graficznie na takiej płaszczyźnie rysunku. Dla każdego rodzaju wielkości z osobna trzeba się wtedy zdecydować co do skali zamiany jednostki danej wielkości na centymetry na rysunku. Przy takim założeniu, można także wprowadzić przelicznik dla wektorów bezwymiarowych — np. wektor o wartości 1 to może być 5cm na rysunku. Wybór skali dla wszelkich wektorów dokonuje się zgodnie z potrzebami, tak by wszystko się na rysunku zmieściło. Nie ma żadnej jednolitej umowy.

Bardzo ważnym przypadkiem ruchu po krzywej jest ruch po okręgu ze stałą szybkością. Zwie się go *ruchem jednostajnym po okręgu.* Całe to określenie trzeba wypowiadać jednym tchem, bo słowa „po okręgu" istotnie modyfikują sens określenia „ruch jednostajny". Chociaż dla pełnej jednoznaczności ruch ciał swobodnych określa się jako „jednostajny prostoliniowy", to często stosuje się skrót mówiąc tylko: jednostajny. Jednostajny bez dodatkowego określenia, „prawdziwy jednostajny" to ruch po prostej, ruch swobodny. W tym sensie ruch jednostajny po okręgu nie jest „prawdziwym" ruchem jednostajnym, a jedynie ruchem ze stałą szybkością przy zmiennym (co do kierunku) wektorze prędkości. Obecnie



wyznaczymy prędkość w tym ruchu. Jednostajny ruch po okręgu charakteryzuje się wartością promienia r i czasem obiegu, który oznaczymy literą T.

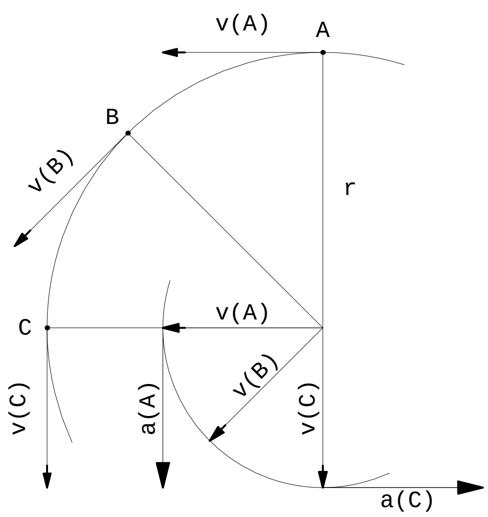
Dla wyznaczenia szybkości w ruchu jednostajnym po okręgu wystarczy zauważyć, że w czasie T punkt przebywa drogę $2\pi r$. Stosunek drogi do czasu to szybkość, więc:

$$v = \frac{2\pi}{T} r$$

Kierunek prędkości jest styczny do okręgu, a więc prostopadły do promienia wodzącego wyprowadzonego ze środka okręgu. Jeśli ruch odbywa się w lewo, jak na naszym rysunku, kierunek prędkości jest na stałe obrócony w lewo o $90°$ względem wektora wodzącego. Można to również wysłowić w ten sposób, że kierunek prędkości w danym momencie jest taki jaki kierunek promienia będzie dopiero za ćwierć obrotu. Takie stwierdzenie jest też prawdziwe dla obrotów

„w prawo".(Sporządź rysunek i sprawdź.) Mówi się w związku z tym że prędkość w ruchu po okręgu wyprzedza położenie w fazie o 90°.

Spójrzmy teraz na kolejne, w miarę upływu czasu, wektory prędkości. Ustawmy początek strzałek reprezentujących te wektory w jednym (jakimkolwiek) punkcie.



Koniec wektora prędkości, o stałej wartości v, będzie poruszał się znów po okręgu, oczywiście z okresem T. Szybkość zmian tego wektora (bardzo ważne dla zrozumienia ruchu i jego przyczyn przyspieszenie), przez zupełną analogię z szybkością zmian wektora położenia, musi tak samo wyrażać się przez wartość obracającego się wektora prędkości i okres, jak szybkość zmian wektora położenia, wyznaczona przed chwilą. Z tych samych powodów wektor przyspieszenia musi być prostopadły do prędkości, i wyprzedzać ją w fazie o kolejne 90°. Mamy więc:

$$a = \frac{2\pi}{T}v$$

Wstawiając zamiast v wcześniej znalezione wyrażenie mamy:

$$a = \frac{2\pi}{T}(\frac{2\pi}{T}r) = \frac{4\pi^2}{T^2}r$$

Ponieważ kierunek wektora przyspieszenia wyprzedza prędkość o ćwierć obrotu, a prędkość wyprzedza położenie też o ćwierć obrotu, łączne wyprzedzenie przyspieszenia w stosunku do położenia wynosi pół obrotu. Oznacza to że kierunki te są przeciwne. Pozwala nam to zapisać wynik dla przyspieszenia w postaci wektorowej:

$$\vec{a} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\vec{r}$$

Użyteczny też bywa wzór na wartość przyspieszenia w którym korzystając ze związku między promieniem, prędkością a okresem ruguje się ten ostatni. Czytelnik łatwo sprawdzi, że prowadzi to do:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Jeśli połączyć uzyskane wyniki z Kopernikańską tezą, że planety krążą po okręgu dookoła Słońca, to dochodzimy do stwierdzenia, że prędkość planety skierowana jest „donikąd" — to znaczy gdzieś w przestrzeń, w coraz to innym kierunku, **ale przyspieszenie celuje stale do Słońca**. Nietrudno zrozumieć że było to bardzo intrygujące odkrycie. Wywarło ono decydujący wpływ na odkrycie przez Newtona właściwych praw ruchu ciał oddziałujących grawitacyjnie. Utwierdziło też wysunięte przez Galileusza (stosunkowo niewiele lat przedtem jak Newton zaczął pracę nad problemem ruchu) przypuszczenie, że sam ruch nie wymaga przyczyny. Gdyby rację miał stary Arystoteles, ruch styczny planety wymagałby czynnika ciągnącego z przodu, w kierunku prędkości, jak koń przed wozem! A tymczasem Słońce, ewidentny „kontroler" ruchu planety, jest zawsze akurat z boku.

Według zasady bezwładności, gdyby nagle zniknęło Słońce, czy też zostało gwałtownie odsunięte jakąś kosmiczną katastrofą, planety zaczęłyby poruszać się (obserwowane z jakiejś odległej gwiazdy) po prostych wyznaczonych przez prędkości jaką każda z nich by akurat miała w momencie katastrofy. Wiedząc że w faktycznym ruchu szybkość planet jest od tysiącleci, ba, setek milionów lat, stała, łatwiej dajemy wiarę, że w tym hipotetycznym ruchu swobodnym, prędkość tymbardziej by była stała. Wobec braku możliwości realizacji ruchu bez tarcia w warunkach ziemskich w dawnych latach, ten rodzaj argumentacji opartej o zjawiska astronomiczne, był bardzo ważny.

2.7 Zasada demokracji. Przekształcenia.

Powróćmy do zagadnienia ruchu względnego ciał — ciał odniesienia i ciała badanego. Jak podkreślaliśmy mocno, warto wybierać takie ciała odniesienia, które nie podlegają działaniu innych ciał. Niezrównoważone działanie na ciało odniesienia komplikowałoby jego ruch i ta komplikacja odbijałaby się na ruchach wszystkich innych, także swobodnych ciał opisywanych względem tego układu. Wszystkie obserwowane ciała swobodne wykazywałyby analogiczne „komplikacje" ruchu — od razu wiedzielibyśmy że kandydat na ciało odniesienia odpada, bo wprowadza nam niepotrzebne utrudnienia (nikt przy zdrowych zmysłach nie włoży sobie dobrowolnie na głowę jakichkolwiek komplikacji!). Komplikacje te uwidaczniają się przy porównaniu z dowolnym ciałem swobodnym, mają więc charakter bezwzględny. Ta bezwzględność jest przydatna bo daje nam jakiś punkt oparcia. Mamy od czego zacząć. Z ulgą pozbywamy się mnóstwa ciał jako ciał odniesienia. Zostawiamy sobie ciała swobodne.

Nadal jest ich dużo. Można rozważać, czy wszystkie one są jednakowo dopuszczalne, czy panuje między nimi „demokracja", czy też nie. Można sobie wyobrazić, że jest jakieś szczególne ciało w Kosmosie, takie że ruch każdego innego ciała względem niego jest ważniejszy od innych ruchów. To znaczy, w tym inaczej urządzonym świecie, każde ciało — **choćby najodleglejsze od Ciała Wyróżnionego** — gdyby miało prędkość względem niego, zachowywałoby się inaczej niż gdyby tej prędkości nie miało. Gdyby miało prędkość 20km/godz. zachowywałoby się inaczej niż przy prędkości 10km/godz. itd. Prędkość względem Tego Ciała miałaby charakter obiektywny, bezwzględny. Prędkość ta musiałaby być jakoś wykrywalna BEZ porównywania naszego ciała z tym hipotetycznym **Ciałem Wyróżnionym**.

Gdyby w takim Wszechświecie utworzyć zamkniętą kajutę dla człowieka i kazać mu wykonać wiele doświadczeń i zapisać wyniki do zeszytu, następnie kazać iść spać, kajutę dodatkowo rozpędzić i człowieka przebudzić, to prowadzone przez niego ponownie stare eksperymenty dawałyby (przynajmniej niektóre) **inne** rezultaty. Ponieważ to sytuacja hipotetyczna, nie warto się zastanawiać na czym by te różnice mogły polegać, **ale jakieś by były**.

Nie rozumiejąc istoty tarcia, nie rozumiejąc jedności praw ciał niebieskich i ziemskich, uczeni przez wiele stuleci uważali, że ruch względem Ziemi jest wyróżniony. Tzw *geocentryzm*, wyróżniona — jak się wydawało — rola Ziemi, a przede wszystkim wyróżniona rola człowieka dla którego cała reszta została celowo przez Stwórcę dostarczona, nie sprzyjał oczywiście dostrzeżeniu równoprawności różnych układów odniesienia. Zwyczajne zresztą obserwacje, takie jak ta, że względem Ziemi upuszczona moneta, poturlawszy się trochę, w końcu spoczywała, podczas gdy względem jadącego rydwanu, po wyrzuceniu oddalała się coraz dalej i dalej pozornie potwierdzały zupełnie inną ważność układu odniesienia Ziemi w stosunku do innych, takich jak rydwan, układów odniesienia.

Z punktu widzenia zasady bezwładności tłumaczymy dzisiaj (czyli od czasu Galileusza) różnicę w zachowaniu monety nie generalną wyższością układu odniesienia Ziemi nad układem odniesienia rydwanu, lecz tym, że w obu układach odniesienia panują dla tej konkretnej monety inne warunki. TRĄCA się o monetę powierzchnia Ziemi jest ruchoma w układzie odniesienia rydwanu, więc ją w końcu ze sobą pociągnie. W układzie Ziemi, Ziemia spoczywa i monety nic nie ciągnie. Stąd różnice zachowań, ale nie różnice praw przyrody. Gdyby równolegle do rydwanu, obok niego, stworzyć biegnący wraz z rydwanem pas i na niego upuścić monetę, to gdyby materiał tego pasa był odpowiedni, upuszczona moneta po krótkim **identycznym jak poprzednio** poturlaniu się, spoczęłaby i obserwator w rydwanie nie mógłby zobaczyć nic innego jak poprzednio, gdy monetę upuszczał stojąc na nieruchomej ulicy. Teraz by się ona od niego nie oddalała, mimo że obserwator po staremu spoczywa w układzie rydwanu. Zupełnie podobnie moneta upuszczona na podłogę równomiernie jadącego tramwaju, zachowa się w stosunku do pasażera zupełnie tak samo, jakby się zachowała, gdyby upuścił on ją na ulicy.

Ciało odniesienia ma służyć tylko do określania odległości, nie chcemy zajmować się — bo to odrębna sprawa — oddziaływaniem badanego ciała i ciała odniesienia! Gdy badane ciało fizycznie oddziałuje z pewnym masywnym, solidnym ciałem dopuszczalnym jako ciało odniesienia, wtedy opis TEGO oddziaływania na ogół najracjonalniejniej będzie prowadzić w TYM układzie odniesienia. Gdy się od oddziaływania z ciałem odniesienia uwolnić, a większość ciał w Kosmosie, dla których chcemy zbadać ogólne prawa ruchu, nie oddziałuje przecież ani z rydwanem, ani z Ziemią, sytuacja wygląda zupełnie inaczej.

A oto przykład podany przez Galileusza: Wyobraźmy sobie kajutę na statku, z zasłoniętymi bulajami i pasażerem nie będącym w stanie, po przebudzeniu, stwierdzić czy statek jeszcze stoi w porcie, czy też płynie po (wyjątkowo spokojnym) morzu. Pasażer może w kajucie mieć akwarium z rybkami, klatkę z papugą, stół bilardowy, czy strzelbę. Cokolwiek zrobi, na cokolwiek popatrzy, gdy statek płynie, i porówna z zapisanymi w zeszycie wynikami obserwacji, uzyskanymi gdy statek stał w porcie, dostanie stale zupełnie to samo.

A zatem osłonięty od oddziaływania z Ziemią, literalnie osłonięty od wiatru, pasażer nijak nie potrafi stwierdzić czy statek płynie czy nie. Prawa przyrody w układzie odniesienia kabiny są w obu przypadkach (w porcie i na morzu), a więc w dwóch układach we względnym ruchu, IDENTYCZNE.

Ponieważ żadne doświadczenie wewnętrzne nie jest w stanie podpowiedzież pasażerowi w którym ze stanów ruchu się on znajduje, nie może on sensownie twierdzić ani że się porusza, ani że stoi. Gdyby się tak złożyło, że statek znalazłby się w prądzie morskim i kapitan postawił go w dryf, bez żagli i bez silników, statek spoczywałby względem otaczającej wody, ale płynął względem odległego brzegu. Bez użycia słowa **względem** nie można powiedzieć czy jest ruch ze stałą prędkością, czy jest bezruch. Zauważmy, że ruch niejednostajny zostałby natychmiast rozpoznany! Prędkość tylko jest względna, jej zmiany już nie.

Równoprawność układów inercjalnych, uniemożliwiająca wskazanie prędkości względem jakiegoś układu **ważniejszego istotnie** od innych układów, co by tej prędkości nadało charakter bezwzględny, nazywa się *zasadą względności.* Nie jest to najszczęśliwsza nazwa, lepiej by było mówić o zasadzie równoprawności układów inercjalnych, albo o zasadzie demokracji.

Zasada bezwładności jest pierwszym ogólnym prawem przez nas dyskutowanym i, oczywiście, jest ona w pełni zgodna z zasadą demokracji. Wszak mówi się w niej, że KAŻDE ciało swobodne względem KAŻDEGO ciała swobodnego porusza się jednostajnie. Z takiego sformułowania wynika przez samą logikę, że ŻADNE ciało swobodne jako ciało odniesienia nie jest dyskryminowane, ani żadne nie jest wyróżnione.

Istotą zasady względności (zasady demokracji układów inercjalnych) jest stwierdzenie, że żadne doświadczenia, żadne badania, żadne prawa — nie tylko obserwacja ruchów swobodnych — nie naruszają tej demokracji. Zasada bezwładności sugeruje zasadę demokracji, ale jej nie przesądza.

Dlatego zasada demokracji układów inercjalnych jest niezależnym prawem przyrody, aksjomatem, opisującym naszą rzeczywistość, której jak dotąd nikt nie obalił, nikt nie podał zjawiska z nią sprzecznego.

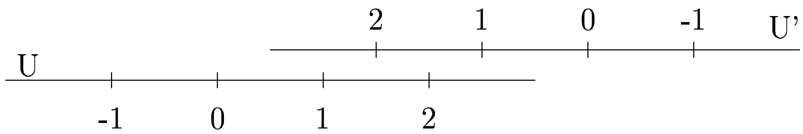
Trudno sobie wyobrazić coś prostszego pojęciowo od zasady demokracji. Mogłoby się wydawać, że to ciekawostka bez większego znaczenia. A tymczasem to — obok zasady bezwładności — drugi z niewielu potężnych filarów na których spoczywa fizyka.

Jest to filar fizyki w ogóle, bez podziału na tzw. fizykę klasyczną (nie wiadomo dobrze co to jest, ale z grubsza to te zagadnienia i teorie które stworzono do końca XIXw.) i tzw. fizykę współczesną.

Jak za chwilę zrozumiemy taka zasada demokracji pozwala, w każdym razie ułatwia, tworzenie nowych teorii, czy formułowanie nowych zasad. Ale i w odniesieniu do starych teorii, znalezionych na drodze genialnego odgadnięcia, bez uwzględniania tej zasady, dla uczącego się dzisiaj tych teorii (chodzi tu i o teorię Newtona i o teorię Maxwella) wyprowadzenie jej z tej prostej zasady powinno być bardzo interesujące. Ułatwia zapamiętanie, ułatwia stosowanie i daje poczucie, że naprawdę lepiej rozumiemy dlaczego świat funkcjonuje tak jak funkcjonuje.

Pierwsza sprawa od jakiej zaczniemy, to zasygnalizowany problem porównywania wskazań zegarów spoczywających w jednym układzie odniesienia z zegarami spoczywającymi w innym układzie odniesienia. Zegary w każdym z układów z osobna są identycznej konstrukcji, mierzące czas którego jednostka jest oparta na identycznym wzorcu atomowym, zsynchronizowane, odległości między nimi są — załóżmy — jednostkowe, w oparciu o tak samo brzmiącą definicję jednostki opartą na wzorcu dającym się niezależnie tworzyć w każdym układzie odniesienia. Ponadto, gdy właśnie mijały się zegary od których w każdym z układów mierzy się odległości, zegary te pokazywały dokładnie 0.

Poszukujemy związku pozwalającego określić współrzędną x i wskazanie zegara t układu — nazwijmy go U — dla zdarzenia o którym wiadomo że zaszło w pobliżu zegara o współrzędnej x' z układu U', gdy pokazywał on czas t'. Założenie o ustawieniu na zero zegarów w początkach układów U i U' oznacza, że gdy $x' = 0,\ t' = 0$ wtedy $x = 0,\ t = 0$ (i na odwrót).



Zakładamy że układy są we względnym ruchu (jednostajnym) z prędkością V. Wybierając orientację osi jak na rysunku uzyskujemy to, że i zegary układu U' poruszają się (każdy) z prędkością V względem U, i zegary z układu U poruszają się z prędkością V względem układu U'. Zauważmy, że ta prędkość względna jest cechą charakteryzującą oba te układy w ich wzajemnej relacji. Nie jest ona cechą po prostu któregoś z nich. Uniemożliwia to zwyczajne narysowanie strzałki wektora V i doczepienie jej do któregoś z układów! Chyba, że sami utożsamilibyśmy się z jednym z tych układów i zaczęli o nim właśnie myśleć jako o nieruchomym. Wtedy wektor prędkości należałoby przypisać temu drugiemu. Czasem tak będziemy robić. Póki można odwlekamy jednak taki wybór, by nawet pozory nie naruszały prawdziwej symetrii obu układów.

W chwili $t = 0$ przez początek układu U przelatuje zegar o współrzędnej $x' = 0$, jego ruch z prędkością V opisuje równanie ruchu jednostajnego: $x = Vt$. Zegar o współrzędnej $x' = 1$ jest gdzieś poza początkiem, z punktu widzenia U, na lewo od początku układu, to znaczy ten zegar układu U, który pokazując akurat zero mijany jest przez niego, nie leży w początku, a ma jakąś współrzędną ujemną. Nazwijmy tę współrzędną literą $-d$. Zegar dwa razy odleglejszy w U' będzie też dwa razy odleglejszy w chwili 0 w układzie U, itd. Ogólnie, położenie początkowe zegara x' wynosi $-dx'$. Ruch z prędkością V takiego ciała musi więc spełniać równanie:

$$x = -dx' + Vt$$

Zasada demokracji mówi nam teraz, że zegary układu U są opisane w układzie U' takim samym równaniem:

$$x' = -dx + Vt'$$

Gdybyśmy znali współczynnik d i sposób jego zależności od V, czyli $d(V)$, moglibyśmy rozwiązać układ tych dwóch równań względem x i t i to byłby związek na którym tak bardzo nam zależy.

Odejmując powyższe równania stronami i przenosząc część wyrazów na lewą stronę dostajemy:

$$(x - x')(1 - d(V)) = V(t - t')$$

Jakie wnioski można wysnuć z powyższego równania? Po pierwsze, gdy $V = 0$, prawa strona równania znika, i na to by lewa strona była stale równa 0, musi być $d = 1$. Zatem $d(0) = 1$. Czy w miarę wzrostu prędkości wartość $d(V)$ pozostaje stale 1, czy zmienia się? Oto jest pytanie!

W historii fizyki najbardziej dramatycznym momentem było odkrycie, że $d \neq 1$, mimo że przez wiele stuleci uprawiano z sukcesem fizykę sądząc że jednak $d = 1$ — dla wszystkich prędkości.

Odkrycie to można porównać z odkryciem (geograficznym? geometrycznym?) że odwrotność promienia Ziemi nie jest zero (jak dla Ziemi płaskiej), lecz różna od zera. Ponieważ ta odwrotność jest bardzo mała, dla figur stosunkowo niewielkich błąd teorii Ziemi płaskiej był niezauważalny.

Wielkość $d(V)$ różni się od 1 w sposób znaczący dopiero dla bardzo dużych prędkości. Dla prędkości pociągu d różni się od jedynki dopiero na piętnastym miejscu po przecinku. Nic dziwnego, że ludzie długo żyli w przekonaniu iż $d = 1$.

Z równania powstałego przez odjęcie naszych dwóch podstawowych zależności opisujących jednostajny ruch zegarów jednej rodziny względem drugiej, odczytujemy że $d = 1$ pociąga za sobą

$t = t'$ i na odwrót. W przybliżeniu zaniedbującym odstępstwo d od jedynki należy też zaniedbać różnice wskazań zegarów. W tym przybliżeniu czas jest absolutny, różnica czasu zdarzeń określona w dwóch układach wychodzi taka sama.

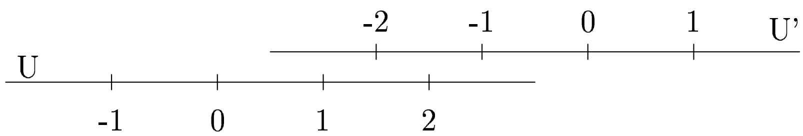
Fizyka przyjmująca przybliżenie $d = 1$ nazywa się fizyką nierelatywistyczną (niezbyt szczęśliwie) albo przedeinsteinowską, albo galileuszową, albo niutonowską. Wyjaśnia ona świetnie szereg zjawisk astronomicznych, technicznych; zawodzi dla zjawisk atomowych, jądrowych, magnetycznych, optycznych.

W dalszym ciągu najwięcej uwagi będziemy poświęcać przybliżeniu galileuszowemu. Równość $d = 1$ pociąga za sobą, jak widzieliśmy:

$$t = t'$$

$$x = -x' + Vt'$$

W tym momencie wygodniej jest w układzie U' zmienić orientację osi, co pociąga za sobą zmianę znaku w powyższym wzorze. Dla sytuacji jak na rysunku:



mamy w przybliżeniu przedeinsteinowskim:

$$t = t'$$

$$x = x' + Vt'$$

Powyższe związki noszą nazwę transformacji Galileusza.

Jeśli ciało porusza się z prędkością v' w układzie U', czyli gdy zachodzi $x' = v't'$, podstawienie do wzoru transformacji Galileusza daje $x = v't' + Vt' = (v' + V)t$. Odczytujemy z powyższego że prędkość tego ciała względem U (współczynnik proporcjonalności między x a t) wynosi

$$v = v' + V$$

Zbadajmy dla ogólniejszej wartości d, bez zakładania że wielkość ta równa się jeden, jaka jest prędkość w układzie U

ciała o prędkości v' w układzie U'. Po zmianie orientacji osi X' w U' równania wiażące wskazania zegarów są:

$$x = dx' + Vt$$

$$-x' = -dx + Vt'$$

Równania te, poza użytymi literami, są identyczne z równaniami wiążącymi współrzędne punktu na zwykłej płaszczyźnie. Rozwiązując względem x i t dostajemy:

$$x = \frac{x' + Vt'}{d}$$

$$t = \frac{t' + \frac{1-d^2}{V^2}Vx'}{d}$$

Wzory te określają transformację współrzędnych i czasu od układu U do U'.

Wzorów powyższych można użyć też do obliczenia prędkości v w układzie U jakiegoś ciała dla którego znamy prędkość v' w układzie U'. Dla ciała tego zachodzi: $x' = v't'$. Wstawiając $v't'$ zamiast x' do wzorów transformacyjnych i dzieląc stronami, dostajemy (po skróceniu licznika i mianownika przez d i t'):

$$\frac{x}{t} = \frac{V + v'}{1 + Vv'\frac{1-d(V)^2}{V^2}}$$

Stosunek x/t obliczony powyżej, to właśnie prędkość ciała v. Zatem

$$v = \frac{V + v'}{1 + Vv'\frac{1-d(V)^2}{V^2}}$$

gdzie przypomnieliśmy iż wielkość d jest zależna od V, choć jeszcze nie wiemy jak.

Jeszcze raz możemy sprawdzić, że zastąpienie d jedynką upraszcza wynik do galileuszowej sumy prędkości układu U' względem U i prędkości ciała w U'. Ale co można powiedzieć o d jeśli nie chcemy się ograniczyć do przedeinsteinowskiego przybliżenia?

Zwróćmy uwagę na to że wynik na prędkość ruchu złożonego nie wygląda na funkcję nie zmieniającą swej wartości gdy zamienimy rolami V i v'. A przecież skoro badane ciało porusza się z prędkością daną powyższym wzorem to i zegar układu U porusza się względem niego z prędkością o tej samej wartości. Ale z punktu tego ciała prędkością transformacji jest v', a prędkością „dodawaną" V. Musi być:

$$\frac{V+v'}{1+Vv'\frac{1-d(V)^2}{V^2}} = \frac{v'+V}{1+v'V\frac{1-d(v')^2}{v'^2}}$$

Nietrudno odczytać, że powyższe równanie upraszcza się do:

$$\frac{1-d(V)^2}{V^2} = \frac{1-d(v')^2}{v'^2}$$

Wyrażenie $(1-d(V)^2)/V^2$ nie zmienia się gdy prędkość V zmienić na zupełnie inną, dowolną wielkość v'. Oznacza to że kombinacja ta nie zależy w istocie od prędkości, że jest stała. Oznaczmy ją literą C

$$\frac{1-d^2}{V^2} = C$$

Z powyższego możemy już wyliczyć wielkość d:

$$d = \sqrt{1-CV^2}$$

Wzór na składanie prędkości:

$$v = \frac{V+v'}{1+CVv'}$$

jest więc — jak być powinno — symetryczny względem zamiany V na v' i odwrotnie.

Podstawienie znalezionej postaci d do równań na x i t, które nazwaliśmy wzorami transformacyjnymi, daje:

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-CV^2}}$$

$$t = \frac{t'+CVx'}{\sqrt{1-CV^2}}$$

Jest to słynna transformacja Lorentza.

Zdumiewające jest to, że na tym etapie nie różni się ona niczym od wzorów wyrażających numery sznurków i numery węzełków na płaszczyźnie Euklidesa. Ale przecież nie jest tak, że czasoprzestrzeń nie różni się niczym od przestrzeni. Inaczej w „płaszczyźnie" (x, t) moglibyśmy założyć np. kort tenisowy!!!

Jest jedno, jedyne narzucające się wyjście. Stała C w czasoprzestrzeni jest zapewne przeciwnego znaku niż to było dla transformacji współrzędnych jakimi były numery węzełków na „placu budowy". To znaczy jest zapewne dodatnia.

Konsekwencje istnienia takiej dodatniej wartości są nieprzebrane, jeśli oczywiście dobrze się rozejrzeć.

Przyjrzyjmy się wyrażeniu na prędkość wypadkową v w zależności od prędkości v' ciała w układzie U' i prędkości samego układu U' względem układu U, tj. V. W przeciwienstwie do wzoru na wypadkową wartość współczynnika kierunkowego, który jest wiekszy od sumy $K+k'$[16], prędkość wypadkowa jest przy $C > 0$ MNIEJSZA od zwykłej sumy prędkości.

Pierwszym eksperymentalnym sygnałem, niestety nie zinterpretowanym właściwie w swoim czasie, wskazującym że tak istotnie jest w przyrodzie były doświadczenia Fizeau mierzącego prędkość światła w wodzie spoczywającej, a następnie w wodzie płynącej względem aparatury. Nowa prędkość była większa od prędkości w wodzie spoczywającej, ale mniejsza od algebraicznej sumy prędkości.

Skoro stała C jest dodatnia, można zdefiniować inną stałą :

$$c = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

o wymiarze prędkości. Ponieważ pod pierwiastkiem, w wyrażeniu takim jak

$$d = \sqrt{1 - CV^2} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

[16] W szczególności ze złożenia dwóch współczynników $K = 1$ i $k' = 1$, co odpowiada obrotom o $45°$, dostajemy nieskończony współczynnik kierunkowy, bo tg$90°$ jest nieskończony.

nie może znaleźć się liczba ujemna, wnioskujemy że żadna prędkość ciała nie może przekroczyć tej wartości. Łatwo sprawdzić że złożenie prędkości c z jakąkolwiek (mniejszą) prowadzi do tej samej wartości:

$$\frac{V+c}{1+Vc/c^2}=c$$

Łatwo też się przekonać, że złożenie dwóch prędkości mniejszych od c każda, musi dać wynik mniejszy od c, choćby zwykła suma składanych prędkości przekraczała c. Na przykład dla $V=0,9c$ i $v'=0,9c$ dostajemy: $v=(1-1/181)c$.

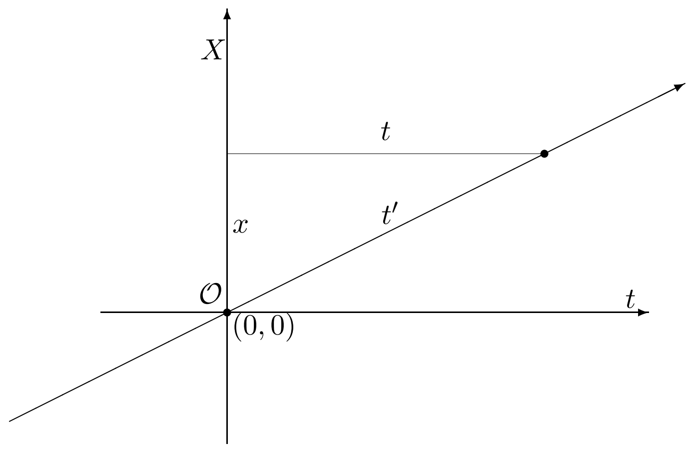
Tak się więc składa, że prędkość c nie może być przekroczona przez żadne ciało, niezależnie jak bardzo byśmy go długo rozpędzali. Wszak na prędkość po dodatkowym etapie rozpędzania można spojrzeć jak na złożenie wcześniej nabytej prędkości v z przyrostem uzyskanym w tym dodatkowym etapie ocenianym w układzie mającym prędkość v. Do dnia dzisiejszego zmierzono już miliardy razy prędkości cząstek elementarnych rozpędzanych w najpotężniejszych akceleratorach, uzyskując rezultat zawsze mniejszy od c, mimo, że według starych praw Newtona, powinny one w danych okolicznościach być większe od c o dziesiątki tysięcy procent!

Niektóre fale, w tym elektromagnetyczne, poruszają się stale z tą prędkością. Dowiecie się o tym w dalszych latach nauki. Prędkość c znana jest najczęściej jako prędkość światła w próżni. Jej dokładna wartość wynosi: $c=299\ 792\ 458$m/s. Prędkość światła jest znana dokładnie, bez żadnego błędu, gdyż od kilkunastu lat jeden metr zdefiniowany jest tak by prędkość światła miała dokładnie te 9 powyżej podanych cyfr.

Podnosząc równania transformacji Lorentza do kwadratu, dzieląc jedno z nich przez c^2 i odejmując dostaniemy:

$$t^2-x^2/c^2=t'^2-x'^2/c^2$$

Jest to w czasoprzestrzeni odpowiednik twierdzenia Pitagorasa.



Występowanie stałej c nie jest najistotniejszą różnicą w porównaniu ze zwykłą przestrzenią. Mierząc np. czas w latach, a odległość w tzw. *latach świetlnych*, doprowadzimy do zniknięcia c w powyższym niezmienniku. Istotną różnicą jest znak minus.

Rozpatrzmy trzy zdarzenia: początek $(0, 0)$, zegar w układzie U w odległości x o jego czasie 0 i tenże zegar potem, w chwili t. W czasoprzestrzeni powstał trójkąt. Sens „przeciwprostokątnej" jest taki, że gdy ja zdecyduję się wędrować z prędkością $V = x/t$, startując z początku, tak by dotrzeć do zdarzenia (x, t) będącego jednym z wierzchołków, będę miał w moim układzie wszystkie zdarzenia tej „przeciwprostokątnej" stale przy sobie, stale w początku mojego układu $(x' = 0)$. Wędrujący ze mną zegar (i ja) zestarzeje się o t' i to jest miara tej przeciwprostokątnej. Znajdzie się ona cała na mojej osi czasu. Wstawiając do niezmiennika mamy:

$$t'^2 - 0 = t^2 - x^2/c^2 = t^2(1 - V^2/c^2)$$

„Przeciwprostokątna" (t') jest więc KRÓTSZA od przyprostokątnej (t). W związku z tym mówi się o czasoprzestrzeni jako o przestrzeni *pseudoeklidesowej*.

Rozdział 3

Zasady dynamiki. Grawitacja

3.1 Prawo zachowania masy i pędu

Chociaż zajmowanie się ruchem ciał swobodnych okazało się nieoczekiwanie bogate w rozmaite pojęcia i właściwości, prawdziwym wyzwaniem fizyki jest program opisu i zrozumienia zachowania ciał oddziaływających.

Ciało oddziaływające, to inaczej ciało nieswobodne, a więc będące pod wpływem przynajmniej jednego innego ciała. By mieć sytuację z oddziaływaniem potrzeba przynajmniej pary ciał. Jest to najprostszy system, jego zachowanie będziemy przede wszystkim badali.

Znamy nawet z życia codziennego przypadki oddziaływania pary ciał rozciągnięte w czasie, gdy prędkość każdego z nich nieustannie się zmienia i przypadki oddziaływań bardzo krótkotrwałych. Te ostatnie nazywamy przeważnie zderzeniami. W zderzeniach występuje długotrwała faza ruchu swobodnego, prędkości cząstek są stałe, i długotrwała faza ruchu swobodnego po zderzeniu, ale już z innymi wartościami prędkości; czasem nawet same ciała po zderzeniu są zmienione. Szczególnym przypadkiem oddziaływania o podobnych cechach jest rozpad początkowo jednej cząstki na dwie (lub więcej) nowe uciekające od siebie ze stałymi prędkościami (np. samorzutny rozpad jądra uranu).

Zderzenia i rozpady są na początek napewno prostsze do zrozumienia niż oddziaływania ciągłe.

Wyobraźmy sobie dwa całkowicie identyczne wagony kolejowe sunące na wprost siebie z jednakowymi prędkościami. W miejscu zderzenia czeka kolejarz by zatknąć kołek uniemożliwiający wagonom odskoczenie od siebie. Połączone wagony nie mogą toczyć się ani w lewo, ani w prawo, bo sytuacja wyjściowa była całkowicie symetryczna. To proste. A teraz rozważmy bardziej realistyczną sytuację. Jeden z dwóch identycznych wagonów stoi, a drugi sunie wolno z górki rozrządowej z jakąś prędkością v. Podobnie jak poprzednio kolejarz w momencie zderzenia łączy wagony na trwałe. Połączone wagony suną w pierwotnym kierunku. Pytamy z jaką prędkością.

Dzięki zasadzie demokracji układów inercjalnych łatwo udzielić odpowiedzi na to pytanie. Przygotujmy na sąsiednim torze jakiś wózek na którym możemy nawet usiąść i nadajmy mu prędkość V taką, by z tego nowego punktu widzenia prędkosc wagonu nieruchomego na torach, a teraz do nas się zbliżającego (właśnie z prędkością V) była równa co do wartości prędkości wagonu wysłanego z górki (przed którym uciekamy). Jeśli zastosować wzór Galileusza na składanie prędkości to ta nowa prędkość wagonu z górki wychodzi $v - V$ i przyrównanie jej do V daje równanie $V = v - V$, i w rezultacie:

$$V = v/2$$

W układzie pomocniczego wózka mamy pierwotną symetryczną sytuację wagonów wpadających na siebie. Już ustaliliśmy że się zatrzymają! A więc po zderzeniu ich prędkość względem pomocniczego wózka będzie zero. Ich prędkość względem torów, po połączeniu, będzie taka jak prędkość tego wózka, czyli $v/2$. A to już ciekawy wynik. Bardzo konkretny.

Gdy uwzględnić transformację Lorentza obliczenie prędkości wózka względem którego wagony nadbiegają symetrycznie przebiega inaczej. Dostaniemy równanie $V = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$, gdyż prędkość wypadkowa takim właśnie wzorem jest dana (w układzie wózka układ torów porusza się z prędkością $-V$, a w tym układzie wagon ma prędkość v). Rozwiązując dostajemy:

$$V = v/(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})$$

Taka też jest poprawna prędkość połączonych wagonów. Widzimy od samego początku, że wyniki mechaniki Galileusza-Newtona są przybliżone.

Prędkość najeżdżającego wagonu jakby się rozmyła. Spadła do połowy, ale za to jest prędkością dwóch wagonów zamiast jednego! Spróbujemy z tego prościutkiego przykładu wyciągnąć ważne i ogólne wnioski.

Przepiszmy wynik na prędkość końcowego ciała w postaci:

$$\frac{v+0}{1+1} = \frac{V}{1}$$

Z powodów, które staną się jasne niebawem, pomnóżmy licznik i mianownik lewej strony przez wielkość m. Narazie nic o niej nie wiemy. Gdy to kogoś irytuje, niech myśli, że $m = 1$.

$$\frac{mv + m \times 0}{m+m} = \frac{V}{1}$$

Równanie powyższe dotyczy jednego szczególnego układu, tego w którym spoczywał jeden ze zderzających się wagonów. Dobrze by było mieć równanie — *prawo ogólne* — słuszne dla każdego układu odniesienia, pozwalające przewidzieć prędkość po zderzeniu na podstawie znajomości stanu obu ciał przed zderzeniem. Odgadniemy najpierw, a potem wykażemy że odgadnięte równania są prawdziwe.

Równanie w układzie dotychczas wprowadzonym ma postać równości ułamków. Prawy odnosi się do sytuacji po oddziaływaniu, lewy do sytuacji przed, a człony w liczniku i mianowniku są sumami jednakowo zbudowanymi dla wszystkich ciał. Oczywiście równość ułamków nie oznacza równości liczników osobno, i równości mianowników. Jeśli jednak mianownik jednego ułamka jest ileś razy większy od mianownika drugiego ułamka, to i licznik musi być tyle samo razy większy. Oznaczmy ten stosunek symbolem M. Równanie dla M jest zatem:

$$m + m = M \times 1$$

Licznik lewego ułamka **musi** już równać się licznikowi prawego pomnożonego przez to samo M

$$mv + m \times 0 = MV$$

Dostaliśmy dwa równania mające postać *praw zachowania*. **Na pewno oba są prawdziwe** — wszak jedno pozwala obliczyć świeżo zdefiniowaną wielkość, drugie mówi o prędkości V to co o niej dowiedzieliśmy się przed wypisaniem tych równań, a więc to co jest, tak czy inaczej, obiektywną prawdą. Istotną własnością tych równań jest to, że jednakowo zbudowane dla poszczególnych ciał z wielkości ich dotyczących wyrażenia, sumowane dla ciał początkowych, dają to samo co taka suma dla ciał końcowych.

Ta szczególna postać podpowiada, ale trzeba to będzie udowodnić, że zastąpienie prędkości v cząstki pierwszej — prędkością v_1' jaką ona ma w układzie U', prędkości 0 — prędkością v_2' jaką cząstka druga ma w układzie U', a prędkości V — prędkością V' jaką połączone ciała mają w tym układzie, da poprawne równanie pozwalające prawidłowo przewidzieć wynik zderzenia w każdym układzie U'.

Najbardziej bezpośrednio można się o tym przekonać wstawiając do poprawnych równań, które już mamy, wyrażenia na prędkości wynikające z transformacji Galileusza. Prędkość układu nowego oznaczymy literą U. Mamy:

$$V = V' + U, \quad v = v_1' + U, \quad 0 = v_2' + U$$

Równania nasze przyjmują, po dokonaniu tych podstawień, postać następującą:

$$m + m = M, \quad \text{nie było co zmienić!}$$

$$m(v_1' + U) + m(v_2' + U) = M(V' + U)$$

Dzięki pierwszemu równaniu, wszystkie człony zależne od U występujące w drugim równaniu skracają się i przyjmuje ono postać:

$$mv_1' + mv_2' = MV'$$

słuszne dla każdego v i każdego U (a więc dla każdego v_1' i każdego v_2').

Przepięknie !!!

Udowodniliśmy, że powyższe równanie jest prawdziwe dla każdej prędkości początkowej wagonu pierwszego, i każdej prędkości początkowej wagonu drugiego, i w każdym układzie inercjalnym, a więc zupełnie ogólnie. Mamy prototyp prawa fizyki. A odkryliśmy je nie wykonując żadnego pomiaru, taka potężna jest moc zasady demokracji!

A co z wielkościami m i M? Nadal m jest dowolne. Jeśli jednak cokolwiek na tę wielkość wybierzemy, nasze równania mówią, że połączonym wagonom trzeba przypisać wielkość $M = 2m$, czyli dwa razy więcej. Tylko ta wartość wstawiona do drugiego prawa zachowania pozwala poprawnie wyliczyć V, w zgodzie z symetrią.

Jak dotąd zbadaliśmy prawo zderzeń tylko dla identycznych ciał. A czy oba powyższe prawa zachowania są słuszne gdy zderzają się ciała różne? Rozważmy co się stanie, gdy nadjeżdżający wagon zderzy się z trzema spoczywającymi — już zresztą wcześniej spiętymi. W krótkim czasie, nim wystawiony na uderzenie wagon przesunął się znacząco, sprężyny między nim a następnym dopiero zaczęły się napinać i jego zderzenie z przybywającym wagonem może być potraktowane jakby tamtych dwóch nie było. Wynik znamy. Prędkość połączonych dwóch wagonów jest połową prędkości pierwotnej. Ale dalszy przebieg procesu można traktować jako zderzenie zespołu dwóch wagonów o prędkości $v/2$ z zespołem dwóch innych wagonów spoczywających. To jeszcze raz zmniejszy prędkość o czynnik 2 dając w efekcie $v/4$. A więc cztery połączone wagony mają prędkość równą $1/4$ prędkości pierwotnej: $v/4 = V$.

Możemy, naśladując poprzedni przypadek, przekształcić ten wynik do następującej postaci:

$$\frac{mv + (3m) \times 0}{m + (3m)} = \frac{V}{1}$$

Znów są dwa ułamki przyrównane; oznaczając i tym razem literą M wielkość czynnika o jaki mianownik lewego jest większy od prawego: $m + (3m) = M$, dla liczników musi być tak samo:

$$mv + (3m) \times 0 = MV$$

Podstawiając ponownie w miejsce prędkości odniesionych do tego specjalnego układu ich wartości wyrażone przez prędkości w układzie poruszającym się z prędkością U, zupełnie analogicznie dostaniemy jak przed chwilą:

$$m_1 + m_2 = M$$

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = MV'$$

gdzie z oczywistych powodów oznaczyliśmy $m_1 = m,\ m_2 = 3m$.

Zaczyna być jasna rola wielkości M, m_1, m_2. Im więcej wagonów połączonych razem, tym większe wartości M, czy m. Nazywając jakiś wagon (lepiej cylinder z metalu szlachetnego chroniony w specjalnym laboratorium) wzorcowym, o nazwie *kilogram*, wszystkie inne m-y wyrażone będą w tych kilogramach. Jest to wielkość zwana *masą* ciała.

W przybliżeniu Galileusza, masa to wielkość przypisana ciału tak, by po pomnożeniu przez prędkość spełnione było prawo zachowania sumy wielkości mv oddziałujących ciał.

Masę jednego, dowolnie wybranego (na mocy umowy fizyków) ciała w przyrodzie określamy arbitralnie jako jednostkową. Sam iloczyn mv nazywa się pędem ciała. Oznaczany jest symbolem p:

$$p = mv$$

Podana wyżej definicja masy — z pozoru dziwaczna i odległa od praktyki życia — jest jedyną dającą się użyć dla ciał niebieskich i cząstek atomowych i subatomowych. Dla ciał „zwykłych” — jak zobaczymy — ta definicja daje się przetłumaczyć na zwykłe ważenie.

Wychodząc z zasady demokracji udowodniliśmy, wprawdzie tylko dla pewnego rodzaju zderzeń, dwa prawa: prawo zachowania masy i prawo zachowania pędu. To bardzo ważny wynik.

Czy można przedłużyć tak rozumowanie, by rozszerzyć prawo zachowania pędu na zupełnie ogólny przypadek dowolnie zderzających się ciał, o nieznanym, różnym dla uczestników oddziaływań składzie wewnętrznym? Ci z Was, którzy studiować będą fizykę dowiedzą się, jak to zrobić, co dodatkowo założyć.

Na tym etapie przyjmiemy, że wydedukowane prostym sposobem, dla paru przypadków specjalnych, dwa prawa, prawo zachowania pędu i prawo zachowania masy, są spełnione we wszystkich oddziaływaniach, jakie do dzisiaj przebadali fizycy[1]. Ze względu na ich nierozerwalne połączenie nazwiemy je jedną zasadą zachowania

[1]Po wyjściu poza przybliżenie transformacji Galileusza, nadal obowiązują dwa prawa zachowania, ale ich postać ulega modyfikacji, o czym piszemy poniżej.

masy i pędu. Jest to już trzecia zasada jaka będzie nam potrzebna do uprawiania fizyki.

Niejeden Czytelnik myśli zapewne jaką też postać przybrałyby owe dwa prawa zachowania, gdyby pamiętać o tym, że transformacja Galileusza, z której jawnie korzystaliśmy, jest tylko przybliżeniem. Powtórzmy analizę zderzenia dwóch jednakowych ciał łączących się w trzecie. Znaleźliśmy wcześniej wartość prędkości po połączeniu, obliczoną w układzie w którym jedno z ciał spoczywało, a drugie padało z prędkością v.

Uzyskaliśmy wynik:

$$\frac{v+0}{1+\sqrt{1-v^2/c^2}} = V$$

Na pierwszy rzut oka nie widać sumy podobnych wyrażeń, ale podzielmy liczniki i mianowniki obu ułamków przez charakterystyczne relatywistyczne pierwiastki. Dodatkowo w lewym ułamku pomnóżmy licznik i mianownik przez masę m. Dostajemy:

$$\frac{\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\times 0}{\sqrt{1-0}}}{\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m}{\sqrt{1-0}}} = \frac{\frac{V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}}$$

Ta równość ułamków, podobnie jak poprzednio oznacza, że jeśli mianownik pierwszego jest większy od mianownika drugiego o jakiś czynnik M, to i pierwszy tak samo. Mamy więc:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m}{\sqrt{1-0}} = \frac{M}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

oraz:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\times 0}{\sqrt{1-0}} = \frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Równania te są w oczywisty sposób prawdziwe. Rozwiązane względem M i V dają tę prędkość, którą wyznaczyliśmy z prostszych rozważań i jakieś M, które jest konieczne, by informacji o końcowej prędkości nadać tę wygodną formę. Ta rola M decyduje o przydatności, użyteczności tej wielkości fizycznej. Masa M wchodzi do powyższych równań, i w oparciu o powyższe równania może być wyznaczona na podstawie pomiarów samych prędkości ciał uczestniczących w oddziaływaniu.

Pominiemy stosunkowo prosty, choć nieco długi rachunek — zupełnie analogiczny do poprzedniego — polegający na wyrażeniu w powyższych dwóch równaniach prędkości określonych w specjalnym układzie w którym jedna jest zerem, przez prędkości w dowolnym innym układzie i wykazaniu, że powyższa postać praw zachowania istotnie w tym dowolnym układzie obowiązuje, a więc że obowiązuje przy dowolnych prędkościach zderzających się ciał[2].

Widzimy, że nadal mamy dwa prawa zachowania:

$$\text{Suma}(\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}) = \text{const}, \quad \text{Suma}(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}) = \text{const}$$

Ale pędem już nie jest mv, lecz ten iloczyn podzielony przez charakterystyczny pierwiastek.

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Oczywiście, gdy uznamy, że występujący pod pierwiastkiem kwadrat stosunku prędkości v i prędkości światła jest zaniedbywalnie mały, dostaniemy poprzedni prostszy wzór.

[2]Czytelnikowi, który zechce sam sprawdzić że tak jest istotnie podpowiadamy użyteczną tożsamość algebraiczną:

$$\frac{1}{\sqrt{1-Cv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-C\left(\frac{v'+U}{1+CUv'}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-CU^2}} \times \frac{1+CUv'}{\sqrt{1-Cv'^2}}$$

Wspólny dla wszystkich składników prawa zachowania pierwiastek z prędkością U pięknie się skraca, a na miejsce zastępowanych pierwiastków ze starymi prędkościami wchodzą kolejno nowe! Jedynie trochę trzeba zatroszczyć się o wyrażenia w licznikach i pokazaż, że człony zawierające U się redukują.

Zamiast prawa zachowania masy dostajemy prawo zachowania wielkości $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Znów, gdy prędkości można zaniedbać w porównaniu z c, jest to poczciwe prawo zachowania masy. Ale gdy prędkości są ogromne, masa ciała przekształcającego się w dwa inne wyraźnie jest różna od sumy mas składników. Jak nazwać tę zachowującą się wielkość dowiemy się niebawem.

Tutaj zbadajmy tylko jedną, następującą konsekwencję. Gdyby udało nam się wskazać ciało i jego produkty rozszczepienia o wyraźnie mniejszej sumie mas, bylibyśmy pewni że produkty te wylecą z OGROMNYMI prędkościami. Niech ciało o masie M rozpada się w spoczynku na dwa jednakowe fragmenty o masie m każdy wylatujące w przeciwne strony z prędkością v. Prawo zachowania pędu jest oczywiście usatysfakcjonowane, a to nowe prawo pozwala wyznaczyć **wartość** prędkości v z wzoru: $M = 2m/\sqrt{1-v^2/c^2}$. I powiedzmy że znaleziony przypadek rozpadu charakteryzuje się tym, że $2m = 0,99M$, czyli że masa produktów końcowych w tym przykładzie różni się o 1% od masy ciała rozpadającego się. Daje nam to: $1 - v^2/c^2 = 0,99^2 \simeq 0,98 = 1 - 1/50 \simeq 1 - 1/7^2$. Odczytujemy ostatecznie: $v \simeq c/7 \simeq 43\ 000$km/s. Prędkość ogromna! Dziesiątki tysięcy razy większa od prędkości atomów w gazie w temperaturze pokojowej. Niszczące skutki tej prędkości, to właśnie groza bomby atomowej!

3.2 Siły

3.2.1 Równanie Newtona

W oddziaływaniu dwóch zderzających się ciał nie zmieniających się w swej budowie podczas zderzenia, efektem oddziaływania jest przeniesienie pewnego pędu z jednego ciała do drugiego. O ile pęd jednego ciała zmaleje, o tyle samo drugiego wzrośnie. To jest istota każdego prawa zachowania. W oddziaływaniu rozciągniętym w czasie, długo, czy nawet stale trwającym, ten identyczny co do wartości i przeciwnego znaku dopływ odbywa się w każdym przedziale czasu. Interesując się zachowaniem jednego ciała musimy zbadać od czego zależy ten strumień pędu, ilość pędu dochodząca do ciała w przeliczeniu na jedną sekundę.

Korzystając z postaci pędu można tę szybkość jego dopływu do ciała wyrazić przez masę i przyspieszenie:

$$\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{mv_2 - mv_1}{t_2 - t_1} = m\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = ma$$

(w fizyce „dokładnej”, niegalileuszowej tak by już nie było).

Newton zauważył, uznając to przypuszczalnie za cechę absolutnie uniwersalną, że w wielu sytuacjach oddziaływania ciał, ta szybkość przepływu pędu, daje się wyrazić, według takiej, czy innej formuły, poprzez położenia i ewentualnie prędkości oddziałujących ciał. Dzisiaj wiemy, że opis oddziaływania za pomocą takiej formuły nie zawsze jest możliwy, ale prawdą też jest, że zakres zjawisk, gdzie takie formuły dają się znaleźć i zastosować jest olbrzymi.

Przypuśćmy że znamy taką formułę dla określonego ciała i umiemy obliczyć, według formuły $F(x, v)$, szybkość dopływu pędu dla każdego położenia opisanego współrzędną x i przy każdej prędkości v. (Całość rozważań mogłaby być od razu wektorowa, ale dla prostoty robimy to tylko w jednym wymiarze.)

Jeśli tak, to można napisać równanie:

$$a = \frac{F(x, v)}{m}$$

zwane równaniem Newtona.

Co wynika z takiego równania? Jeśli pomyślimy o krótkim odstępie czasu, to łatwo można przewidzieć, jakie będzie położenie, i jaka będzie prędkość ciała po upływie tego odstępu jeśli znamy początkowe położenie i początkową prędkość.

Z definicji prędkości mamy przecież: $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = v$, stąd:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v\Delta t$$

Tak samo z definicji przyspieszenia wynika:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a\Delta t = v(t) + \frac{F(x, v)}{m}\Delta t$$

Skoro już znamy prędkość i położenie w nowej późniejszej chwili, to można potraktować tę chwilę $t + \Delta t$ znów jako początkową i analogicznie wyznaczyć położenie i prędkość w chwili $t + 2\Delta t$.

Procedurę obliczenia można kontynuować bez końca [3]. Można **przepowiadać** ruch. Los ciała jest przesądzony, zdeterminowany.

Dlatego zasadę mówiącą o istnieniu funkcji F zależnej od położenia i prędkości nazywać będziemy *zasadą determinizmu*.

Wielkość F zwie się tradycyjnie siłą.

Znane jest sformułowanie użyte przez Laplace'a, że gdyby znać wszystkie formuły dla sił i wszystkie położenia i prędkości w pewnej chwili, wszystkich cząstek Wszechświata, to można by przewidzieć jak będzie wyglądał Wszechświat w dowolnej chwili w przyszłości (a także jak wyglądał w dowolnej chwili w przeszłości).

Opinia ta budziła żywe spory wśród filozofów. Wprawdzie żaden konkretny człowiek nie dysponuje tymi danymi, ale jeśli one istnieją, bieg rzeczy jest wytyczony. Znika miejsce dla wolnej woli, odpowiedzialności za czyny itp. Obecnie żyjący fizycy z pewnym rozczuleniem myślą o takich poglądach. Nie chodzi tylko o to, że ilość najmniejszych cząstek składających się na Wszechświat jest niewyobrażalnie duża. Po wielkich sukcesach teorii fizycznej opartych na rozwiązywaniu równań Newtona, przekonano się, że zachowanie atomów, lub jeszcze mniejszych składników materii, musi być opisane zupełnie inaczej niż punkt materialny mechaniki klasycznej. Samo pojęcie położenia traci swój sens jako jednoznaczna funkcja czasu. Zasada Newtona (którą tu nazwaliśmy zasadą determinizmu) musi być zastąpiona czymś innym.

Przypomnijmy krótko omówione już w tym podręczniku zasady:

- **Zasada bezwładności**

- **Zasada demokracji** (równoważności układów inercjalnych, zwana tradycyjnie zasadą względności)

[3] Jest tu pewna subtelność. W wyrażeniach po prawej stronie dla obliczenia przesunięcia powinniśmy brać prędkość średnią, a my znamy tylko jej wartość na początku przedziału. (Analogicznie z przyrostem prędkości). Dlatego przedział Δt powinien być krótki. Istnieje rozbudowany dział matematyki (teoria równań różniczkowych) ustalający takie sposoby postępowania, by błąd spowodowany taką metodą uczynić tak małym jak tylko to jest wymagane. W wielu wypadkach — tylko takimi zajmiemy się w tej książce — te wszystkie kolejne kroki dają się ująć jednym prostym wzorem wyrażającym położenie ciała w dowolnej chwili przez jego położenie i prędkość w chwili początkowej.

- **Zasada zachowania pędu i masy** (bardzo silnie sugerowana przez poprzednie dwie, praktycznie przez nie narzucona.)
- **Zasada determinizmu** stwierdzająca możliwość wyrażenia szybkości dopływu pędu, czyli możliwość wyrażenia siły, przez położenie i prędkość cząstki.

Sam Newton nie doceniał zasady względności i chyba z niej nie korzystał. Dlatego powszechnie słyszy się o trzech zasadach Newtona. Były one nieco inaczej uszeregowane. Jedynie pierwsza, zasada bezwładności, była w tej samej formie pierwszą zasadą Newtona. Zasadą numer dwa w jego dziele *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* było sformułowanie o równości siły i iloczynu masy przez przyspieszenie. Zamiast zasady zachowania pędu Newton wprowadził jako trzecią, zasadę równości (z przeciwnym zwrotem) sił wzajemnego oddziaływania.

Przedstawiony powyżej równoważny zestaw jest o tyle wygodniejszy dydaktycznie, że dało się wydzielić — jako pierwsze trzy powyższe zasady — tę część teorii Newtona, która się nie zestarzała. Pierwsze trzy zasady stosują się nadal do tych obszarów fizyki współczesnej, które dotyczą zjawisk w mikroświecie.

Mimo ograniczonego — jak to dzisiaj fizycy dobrze wiedzą — zakresu stosowalności metody Newtona opisu rzeczywistości, jest ona na tyle użyteczna, że zapewne przez długie jeszcze lata będzie przedmiotem nauki kolejnych pokoleń uczniów i studentów.

3.2.2 Siły grawitacyjne

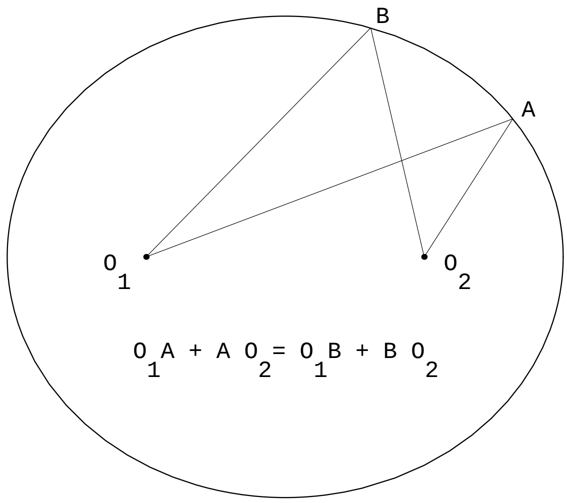
Jako pierwszy obszar do zastosowania zasad dynamiki wybrał Newton astronomię, ściślej zagadnienia związane z Układem Słonecznym. Grunt był już nieźle przygotowany. Pogląd Kopernika o centralnej roli Słońca był już dość powszechnie akceptowany przez ludzi uczonych. Dokładne obserwacje astronoma Tychona de Brache pozwoliły następnie Keplerowi uściślić ideę Kopernika o kołowych orbitach.

Jak odkrył Kepler:

1. Planety krążą po orbitach eliptycznych.

2. Prędkość z jaką promień planety zamiata pole powierzchni jest stała.

3. Kwadraty czasów obiegu proporcjonalne są do trzecich potęg dużych półosi elipsy: $T^2 = Kr^3$, gdzie K pewna stała, wspólna dla wszystkich planet.



Rysunek 3.1: Elipsa

Regularne koło oglądane nie na wprost, albo rzucające cień na płaszczyznę przy różnym od zera wzajemnym skręceniu płaszczyzny koła i płaszczyzny na którą rzutujemy, przyjmuje powszechnie znany kształt elipsy. Jak wynika z określenia, są elipsy bardzo ściśnięte, ale są i takie, co bardzo przypominają okrąg. Orbity planet są mało zdeformowane, dlatego Kopernik uznawał je za okręgi, choć miał z tym pewne trudności. Piszemy o tym na końcu podręcznika, w Uzupełnieniu. Elipsę można też opisać jako miejsce geometryczne punktów, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów jest stała(rysunek).

Pozwala to narysować elipsę za pomocą sznurka i dwóch szplilek wbitych w stół. Wyróżnione punkty nazywają się ogniskami. W przypadku planet Słońce leży w jednym z tych ognisk.

Dla naszych celów wystarczy przybliżenie ruchu kołowego.

Układ Słoneczny to więcej niż dwa ciała. Ale na szczęście występuje ogromna dysproporcja między masą Słońca a masą każdej z planet Układu. Pozwala to z dobrym przybliżeniem zaniedbać wpływ planet na ruch Słońca, a także zaniedbać wpływ na ruch planety pozostałych planet Układu i uwzględnić tylko wpływ Słońca. Przybliżenie w którym w układzie Słońca (inercjalnym) porusza się pojedyncza planeta będąca pod jego wyłącznym działaniem jest na początek zupełnie wystarczające.

Obliczyliśmy poprzednio, w rozdziale Kinematyka, przyspieszenie ciała w ruchu po okręgu: $a = \frac{4\pi^2}{T^2}r$. Skorzystajmy z obserwacji Keplera wiążącej czas obiegu z promieniem: $T^2 = Kr^3$ i wstawmy tę wartość T^2 do wyrażenia na przyspieszenie w ruchu po okręgu. Dostajemy:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2}r = \frac{4\pi^2}{Kr^3}r = \frac{4\pi^2/K}{r^2}$$

Przyspieszenia planet są więc odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ich odległości od Słońca. Dopływ pędu, czyli siła działająca na planetę ze strony Słońca, równa iloczynowi przyspieszenia i masy planety jest:

$$F = \frac{\frac{4\pi^2}{K}m}{r^2}$$

Oddziaływanie jest procesem wzajemnym. Pęd uzyskiwany przez planetę jest zarazem pędem traconym przez Słońce. Można też powiedzieć, że Słońce zyskuje pęd o takiej samej wartości, tylko o przeciwnym znaku. Na powyższą wartość siły można więc patrzeć jak na siłę działającą na Słońce ze strony planety (kierunku i tak nie zaznaczamy, pamiętając że siła ciągnie planetę do Słońca, a Słońce do planety). Powinna być więc ta siła także proporcjonalna do masy Słońca. Warto więc zapisać: $4\pi^2/K = GM$, gdzie M jest masą Słońca, a G pewną nową stałą. Uzyskujemy:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Genialne uogólnienie Newtona polegało właśnie na przypuszczeniu, na podstawie przypadku szczególnego, ogólnej słuszności powyższego prawa, nie tylko dla pary: planeta-Słońce, ale i dla pary Ziemia-Księżyc, Ziemia-jabłko, Jowisz-księżyc Jowisza, itp.

To właśnie jest słynne prawo powszechnego ciążenia Newtona.

Naśladując Newtona dotarliśmy do powyższej prostej postaci w paru krokach argumentacji, na podstawie bardzo szczególnego, traktowanego w uproszczeniu przypadku. Idea Newtona polega na stosowaniu formuły siły — już bez „grzebania" w niej, bez poddawania modyfikacjom, w szczególności bez dobierania coraz to innej wartości G — do coraz to nowych, coraz bardziej skomplikowanych przypadków i konsekwentnym rozwiązywaniu równań różniczkowych do ich opisu i objaśniania. Nie chodzi tu tylko o rozszerzenie na ruchy kołowe coraz to innych par ciał, ale na sytuacje — wymieniając pobieżnie — takie jak: orbity eliptyczne, zaburzenia w ruchu eliptycznym planety związane z obecnością (słabego, ale odczuwalnego) oddziaływania ze strony innych planet, zachowanie gromad gwiazd, czy gromad galaktyk, etc.

Siła przepowiadania teorii Newtona jest tak wielka, że gdy po szczegółowych obliczeniach wpływu Jowisza i innych planet na orbitę planety Uran, nadal nie uzyskano pełnej zgodności z orbitą obserwowaną, uznano, że musi istnieć nieznana planeta, daleka, więc słabo na niebie widoczna, i jeszcze nieodkryta, która jest odpowiedzialna za istniejące różnice. Na to by planeta ta objaśniała obserwowane zaburzenia orbity Urana, musiała sama mieć określone, dające się wyliczyć, charakterystyki: masę i orbitę. Po skierowaniu teleskopu w przepowiadane przez Leverriera miejsce na niebie, zobaczono rzeczywiście planetę! Nazwano ją Neptunem. Historia powtórzyła się jeszcze nie raz. Ostatnio polski astronom Wolszczan odkrył na podobnej zasadzie trzy planety obiegające odległą gwiazdę.

Poniżej zajmiemy się zbadaniem kilku ważnych poznawczo, bądź ze względów praktycznych, zastosowań teorii grawitacji Newtona.

Ruch ciał w pobliżu powierzchni Ziemi

Promień kuli ziemskiej wynosi, jak wiadomo, 6 370km. Gdy wznosimy się metr, 10 metrów, czy nawet 100m ponad powierzchnię, zmiana odległości od środka Ziemi, wyrażona w procentach jest znikoma. Zaniedbajmy ją, to znaczy podstawmy w miejsce odległości r w prawie Newtona stałą wartość R_Z. Równanie Newtona ruchu przyjmie postać:

$$ma = \frac{GM_Z m}{R_Z^2}$$

Charakterystyczną rzeczą w teorii grawitacji jest występowanie masy ciała zarówno po lewej stronie równania Newtona, jak i po prawej. Równanie przez tę masę skracamy, dostając:

$$a = \frac{GM_Z}{R_Z^2}$$

Każde ciało blisko powierzchni Ziemi, poddane działaniu samej grawitacji spadałoby z przyspieszeniem stałym i takim samym dla wszystkich ciał. Jest to bardzo ważny, bardzo intrygujący, zupełnie podstawowy dla naszej egzystencji, dla przyrody, dla techniki, budownictwa, itd. itp. fakt.

Już Galileusz — dzięki temu że zrozumiał rolę oporów zaciemniających istotę oddziaływania ciała z samą Ziemią — umiał wywnioskować na podstawie obserwacji i przemyśleń, że zawsze wtedy gdy opory są zaniedbywalne, przyspieszenie spadku (mówimy przyspieszenie spadku swobodnego — niezakłóconego oporem) jest jednakowe dla wszystkich ciał. Nosi ono nazwę *przyspieszenie ziemskie*, oznaczane jest symbolem g i jego wartość jest dobrze znana od dawna[4].

Ze względu na niewielkie odstępstwa Ziemi od kulistości spowodowane jej wirowaniem, a także z tego powodu tego, że sama podłoga laboratorium krążąc po okręgu raz na dobę, ma pewne przyspieszenie dośrodkowe, inne na równiku, inne na średnich szerokościach geograficznych, znikające na biegunie, faktycznie mierzone przyspieszenie względem podłogi, czy innego podłoża, jest

[4]Nawet najprostszymi środkami, mierząc czas spadania t masywnej kuli ze znanej wysokości h, a następnie przekształcając wzór $h = at^2/2$ do postaci: $a = 2h/t^2$, można samemu się przekonaż, że jest to ok. 10 metrów na sekundę kwadrat. Dużo dokładniej można wyznaczyć wartość g za pomocą wahadła. Poznamy tę metodę później.

nieco różne w różnych punktach globu. Różnice nie przekraczają ułamka procenta. Dla wszystkich miejsc w Polsce można przyjąć: $g = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. We wszystkich zadaniach i przykładach będziemy przyjmowali wartość zaokrągloną do 10 metrów na sekundę kwadrat.

W spadku bez prędkości początkowej, przebyta droga wynosi

$$\frac{1}{2}gt^2 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2$$

Jak zapowiadaliśmy w rozdziale „Kinematyka”, jest to istotnie bardzo pospolita forma ruchu! Przynajmniej w pierwszej fazie spadku, każdy przedmiot co wymsknął nam się z rąk, tak właśnie podąża ku podłodze.

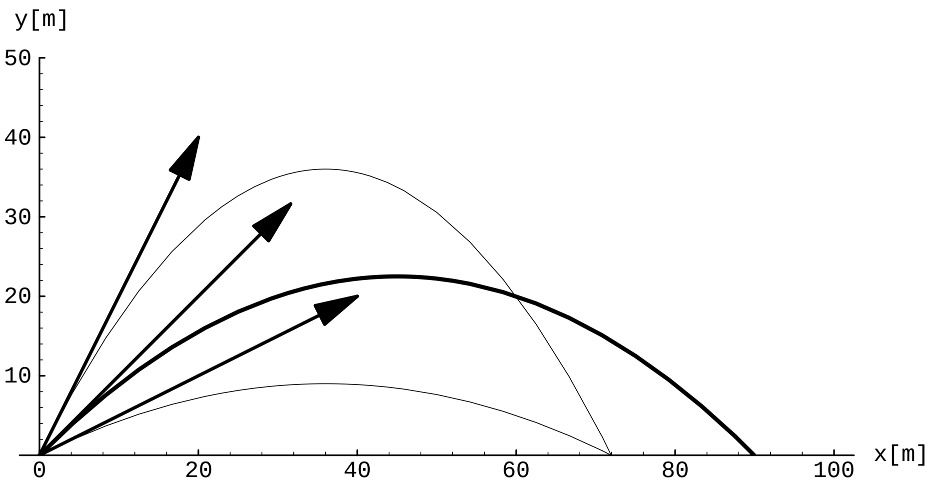
W rzucie pionowym do góry z prędkością początkową v, przemieszczenie do góry po czasie t wynosi: $vt - gt^2/2$. Przekształcając ten trójmian kwadratowy do wygodniejszej postaci: $v^2/(2g) - g(t - v/g)^2$ odczytujemy, iż największą wartość przyjmie współrzędna gdy odejmowany człon stanie się zerem, a więc dla $t = v/g$. Wysokość maksymalna osiągnięta przez ciało wynosi dla tej chwili $v^2/(2g)$. Czas powrotu do poziomu wylotu osiągany jest gdy $vt - gt^2/2 = 0$, czyli dla $t = 2v/g$. Wynika z tego, że czas wznoszenia i czas opadania są sobie równe.

Powyższe wyniki można też uzyskać bez większego trudu stosując informację o prędkości średniej. Pierwsza faza ruchu do utraty prędkości v musi trwać $t = v/g$. Prędkość średnia w tej fazie to $v/2$. Uwzględniając czas wznoszenia daje to wysokość: $h = (v/2)(v/g) = v^2/(2g)$. W ruchu powrotnym $gt^2/2 = h = v^2/(2g)$, a więc czas spadku też wynosi v/g. To był czas na stracenie prędkości początkowej (w tempie 10m/s na sekundę). Zyskując w tym samym tempie, ciało powraca do poziomu z prędkością identyczną, co do wartości bezwzględnej, z prędkością wyrzutu.

„Odzyskanie” przez ciało wartości bezwzględnej prędkości, po powrocie do punktu wyjścia, jest bardzo charakterystyczne dla mechaniki, zajmiemy się tym dalej.

Rzut ukośny

Kolejny ciekawy przypadek, to tzw rzut ukośny. Wyrzucamy ciało z pewnego poziomu nadając mu równocześnie obie składowe prędkości: poziomą i pionową (do góry). Nazwiemy współrzędne prędkości: v_x i v_y.



Rysunek 3.2: Rzut ukośny

Wiemy od samego początku, że prędkość, pęd, przyspieszenie, są wektorami, mają swoje składowe. W każdym układzie wersorów związki mechaniki obowiązują osobno dla wszystkich składowych, a więc i dla wszystkich odpowiadających sobie składowych. Dlatego, wybierając wersory: jeden poziomo, drugi pionowo do góry mamy w kierunku poziomym ruch jednostajny, w kierunku pionowym rzut do góry. Pozwala to od razu zapisać zależność położenia od czasu:

$$x = v_x t$$

$$y = v_y t - gt^2/2$$

To jest kolejny przykład użycia równania Newtona do wyznaczania przyszłości, w zależności od warunków początkowych. Jakąkolwiek wartość czasu t pomyślimy, natychmiast możemy obliczyć gdzie ciało będzie w tej chwili (ile wyniesie x, i ile y). To jest właśnie słynny determinizm.

Często bardziej niż sam przebieg w czasie interesuje nas jedynie kształt toru ciała, albo nawet i mniej — np. zasięg rzutu w zależności od prędkości i kąta wyrzutu. Mając rozwiązany problem wyznaczenia ruchu, jak w tym przykładzie, bardzo łatwo odpowiedzieć na wszystkie podobne pytania.

W celu opisu toru, wyznaczamy t w zależności od x i podstawiamy do wyrażenia na y otrzymując:

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{g}{2v_x^2}x^2$$

Znacie krzywą opisaną tym równaniem z lekcji matematyki — to parabola. Często widzimy ją w telewizji w migawkach z kortów.

Nietrudno obliczyć zasięg rzutu, miejsce gdzie współrzędna y staje się ponownie zerem. Przyrównując y z powyższego wzoru do zera odczytujemy dwa pierwiastki: $x = 0$ i $x = 2v_xv_y/g$. Pierwszy odpowiada miejscu wyrzutu, drugi miejscu upadku.

Interesujące może być pytanie o kąt pod jakim należy wyrzucić ciało, by dysponując stałą wartością prędkości $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (Twierdzenie Pitagorasa), uzyskać **maksymalny zasięg**.

Oznaczmy kwadraty składowych prędkości literami a i b. Z warunków zadania wynika, że ich suma jest narzucona z góry. Wybór kąta, to wybór pomiędzy różnym rozdzieleniem tego co mamy do dyspozycji pomiędzy a i b, tak by ich iloczyn był możliwie największy (wyliczony zasięg jest wprost proporcjonalny do $\sqrt{ab}$). Większość szkolnych zadań na minimum, lub maksimum daje się sprowadzić do tego problemu.

Jego rozwiązanie jest łatwe do uzyskania, do zrozumienia i do zapamiętania. Korzystając z wzorów skróconych na kwadrat sumy i różnicy mamy:

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

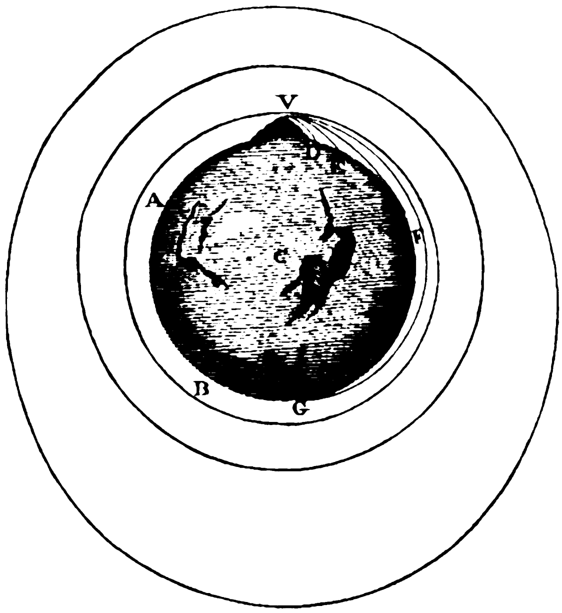
Gdy suma jest ustalona, na wartość iloczynu nadal wpływa różnica. Ale człon z różnicą tylko zmniejsza wynik, więc maksimum nieodmiennie osiągane będzie wtedy, gdy różnica tych liczb znika.

Maksimum iloczynu liczb o ustalonej sumie osiągane jest gdy liczby te są równe.

Wracając do naszego przykładu widzimy, że maksymalny zasięg wystąpi przy $v_x = v_y$. Oznacza to, że kąt wyrzutu powinien wynosić 45°. Maksymalny zasięg $d = 2v_xv_y/g = 2v_x^2/g = v^2/g$. A oto wygląd torów ciał wyrzuconych z prędkością $30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ dla trzech różnych kątów, takich, że: $v_x = 2v_y$, $v_x = v_y$, $v_x = 0.5v_y$.

Księżyc i sztuczne satelity

Znany powszechnie jest rysunek z książki Newtona ilustrujący umieszczenie dowolnego ciała ziemskiego na orbicie wokołoziemskiej. Z punktu widzenia oceny trudności technicznych w realizacji tego zadania (przezwyciężonych dopiero w 1957r.) interesujące jest obliczenie prędkości pojazdu by mógł on faktycznie krążyć po okręgu.



Ze względu na opór atmosfery, prawdziwy satelita musi obiegać orbitę odległą od powierzchni Ziemi co najmniej o paręset kilometrów, gdzie opór jest już wystarczająco mały. Nawet 200, czy 300 kilometrów to dość niewiele w porównaniu z promieniem Ziemi, przyjmijmy że siła grawitacji jest tam nadal równa mg. W podobnym duchu promień tej orbity przyrównamy do promienia Ziemi. Korzystając ze znalezionego wcześniej wyrażenia na przyspieszenie dośrodkowe mamy dla tej sytuacji:

$$v^2/R_Z = g, \quad \text{czyli} \quad v = \sqrt{R_Z g} = \sqrt{10 \times 6400000}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

W tym samym przybliżeniu czas jednego obiegu takiego *minimalnego* satelity wynosi 5000s, czyli niecałe 1,5 godziny. Tyle też trwała pierwsza podróż Gagarina.

Czasy obiegu satelitów na wyższych orbitach mogą być równie łatwo wyznaczone jak satelity minimalnego. Radzimy Czytelnikowi obliczyć ten okres dla satelity w odległości 380 000 km od Ziemi. W takiej odległości krąży Księżyc — naturalny satelita Ziemi.

Legenda mówi, że Newton tak był wzruszony w momencie gdy zrozumiał, że dotarł do możliwości PRZEPOWIEDZENIA ile ma trwać miesiąc, że prosił przyjaciela o dokonanie ostatniego działania. Takie wydarcie Niebu jednej z jego tajemnic, to musi robić wrażenie.

W dotychczasowych przykładach zakładaliśmy konsekwentnie, że między dwoma oddziaływającymi grawitacyjnie ciałami występuje ogromna dysproporcja wielkości. Pozwalało to przyjąć, że układ odniesienia związany z tym ciężkim ciałem jest w doskonałym przybliżeniu układem inercjalnym.

W układzie Ziemia – Księżyc ta dysproporcja nie jest wcale przytłaczająca! Średnica Księżyca jest zaledwie kilkakrotnie mniejsza od średnicy Ziemi, a masa stanowi więcej niż 1% jej masy. Przy przysłowiowej astronomicznej dokładności musi czynić różnicę czy rachunek jest w miarę dokładny, czy przyjmuje się takie dość grube w tym wypadku przybliżenie,

Potraktujemy ruch Księżyca i Ziemi pod wpływem ich wzajemnego oddziaływania jako tzw. zagadnienie dwóch ciał. Oczywiście poprzednie przykłady zawierały też dwa ciała, ale jedno z nich tylko dostarczało siły. Gdy wyraźnie mówimy o zagadnieniu dwóch ciał chcemy podkreślić, że wyniki będą obowiązywać ściśle dla każdej proporcji oddziałujących mas, nie tylko gdy jedna dominuje. Pewne ogólne związki, właściwie całość rozumowania będzie miała znaczenie dla wielu innych oddziaływań pary ciał, i to oddziaływań niekoniecznie grawitacyjnych[5].

Łączny pęd dwóch oddziałujących ciał jest stały. Oznaczając ten stały pęd literą $\vec{P}$ mamy:

[5]Ziemia i Księżyc są dodatkowo pod działaniem Słońca. Nasze obliczenia zaniedbujące ten fakt nie będą więc dokładne, ale w rzeczywistości wzajemny „taniec” Ziemi i Księżyca i ich wspólny obieg wokół Słońca są w dużym stopniu niezależne, więc nie będzie to złe przybliżenie.

$$m_1 \frac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t} + m_2 \frac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t} = \vec{P}$$

Mnożąc stronami przez przyrost czasu, dzieląc przez sumę mas i przenosząc wyrazy odnoszące się do czasu wcześniejszego na prawo dostajemy:

$$\frac{m_1\vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2\vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1+m_2} + \frac{\vec{P}}{m_1+m_2}\Delta t$$

Punkt wyznaczony wektorem

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}$$

nazywa się *środkiem masy*. Wykorzystując to oznaczenie przepisujemy nasz ostatni rezultat w postaci:

$$\vec{R}(t+\Delta t) = \vec{R}(t) + \frac{\vec{P}}{m_1+m_2}\Delta t$$

Ze względu na stałość $\vec{P}$, ostatnie równanie wyraża fakt jednostajnego przyrostu wektora $\vec{R}$ z prędkoćią $V = \frac{\vec{P}}{m_1+m_2}$. Oznaczając sumę mas literą M możemy też napisać: $\vec{P} = M\vec{V}$. Jest to łatwy do zapamiętania wzór.

Środek masy ciał oddziałujących tylko ze sobą porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Jeżeli tak, to można ten środek masy obrać za początek pewnego inercjalnego układu odniesienia. W układzie tym mamy:

$$0 = \vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}$$

co można też przepisać w postaci:

$$m_1\vec{r}_1(t) = -m_2\vec{r}_2(t)$$

Uzyskaliśmy prosty i łatwy do interpretacji rezultat. Rozpatrywane ciała znajdują się stale po przeciwnych stronach środka masy w odległościach odwrotnie proporcjonalnych do ich mas. Inaczej mówiąc środek masy znajduje się na lini łączącej oba punkty i dzielący odległość między nimi w proporcji do mas — bliżej masy większej.

Gdy jedno z ciał porusza się po okręgu, drugie musi to robić w tym samym czasie to samo, tyle że po okręgu o proporcjonalnie innym promieniu.

W przypadku Ziemi i Księżyca oznacza to nie tylko, że krąży nasz towarzysz, ale i że wywołuje on krążenie Ziemi wokół punktu (krążącym gładko wokół Słońca) znajdującego się między Ziemią a Księżycem — oczywiście o wiele bliżej Ziemi. Ten ruch Ziemi wokół środka masy jest bezpośrednio obserwowalny, gdyż odbija się na ruchach pozornych wszystkich obserwowanych z Ziemi planet. Mierząc jego promień i porównując ile razy jest mniejszy od promienia orbity Księżyca, astronomowie wyznaczyli stosunek masy Księżyca do masy Ziemi.

Ten ruch Ziemi ma pewien istotny skutek dla zjawisk zachodzących na naszej planecie. W układzie nieinercjalnym, coś zawsze się musi wydarzyć by związane z nim ciała mogły uczestniczyć w ruchu (inaczej by się oddzieliły). Np. walizka w pociągu dociśnie się do ściany. Herbata w wirującej szklance podnosi swój poziom, tym więcej im dalej od osi obrotu. W przypadku ruchu wywołanego działaniem Księżyca podnosi się nieco poziom oceanu w obszarze najdalszym od wspólnego środka masy, a więc po stronie przeciwnej Księżycowi (to trochę zaskakujące!). Jednocześnie przyciąganie Księżyca, działające wprost na cząsteczki wody, jest silniejsze po stronie zwróconej do Księżyca, niż po przeciwnej. W rezultacie tworzą się dwa garby: i tam gdzie Księżyc jest w zenicie, i po stronie przeciwnej. Linia łącząca garby obraca się wolno — raz na miesiąc. A skorupa ziemska raz na dobę. W rezultacie w określonym punkcie na Ziemi mniej więcej co dwanaście godzin obserwuje się przypływ oceanu.

Na koniec powiążmy okres obrotu obu ciał z ich masami. Oznaczmy w tym celu ich odległość r. Promień orbity ciała m_1 równy jest jego odległości od środka masy i wynosi: $m_2 r/(m_1 + m_2)$. Równanie Newtona przyjmuje postać:

$$m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Jeśli skorzystamy ze związku $GM_Z = gR_Z^2$, to na okres obiegu Księżyca dostaniemy:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r_{Z-K}^3}{gR_Z^2(1 + m_K/m_Z)}$$

Dla satelity sztucznego stosunek jego masy i masy Ziemi jest kompletnie pomijalny w porównaniu z jedynką, dla Księżyca nie. Ponieważ — poza tym stosunkiem mas — wszystkie inne wielkości są znane w powyższym wzorze, można go użyć do niezależnego wyznaczenia masy Księżyca.

Wynik powyższy — podobnie jak prawo Keplera — wyraża kwadrat okresu T przez trzecią potęgę odległości, tyle że ciała krążącego wokół Ziemi, a nie wokół Słońca. Współczynnik proporcjonalności nie jest uniwersalny, lecz zawiera poprawkę zależną od masy Księżyca. Taka modyfikacja powinna wystąpić i w prawie Keplera dla planet. Planety są jednak tak lekkie w porównaniu ze Słońcem, że ta zależność jest mniejsza niż była dokładność pomiarów Tychona de Brache. Można to skomentować tak, że nauka miała szczęście. Gdyby było inaczej, Keplerowi byłoby trudno odkryć ścisłe prawo, tymbardziej, że przecież nie znał mas planet. Rozwój mechaniki z pewnością by się opóźnił.

Masa Ziemi

Zgodnie z teorią Newtona iloczyn znanego promienia Ziemi w kwadracie i łatwo mierzalnego przyspieszenia Ziemskiego równy jest iloczynowi masy Ziemi i stałej grawitacyjnej:

$$GM_Z = gR_Z^2$$

Iloczyn ten znał i Newton. Jest interesujące wyznaczyć każdy z obu czynników. Newton nie miał możliwości wykonania takiego pomiaru. Mógł co najwyżej bardzo grubo oszacować masę Ziemi znając jej objętość i przyjmując, że zapewne głębsze warstwy mają gęstość nie mniejszą niż typowe skały na powierzchni, i zapewne nie większą niż najcięższe znane metale. Takie założenie pozwala stwierdzić, że stała G jest zawarta pomiędzy $1,5 \cdot 10^{-11}$ a $1,5 \cdot 10^{-10}$ w jednostkach $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$

Nawet dla większej z tych wartości siła przyciągania między dwoma „zwykłymi” ciałami, to znaczy, gdy żadne nie jest ciałem niebieskim, byłaby znikomo mała. Nawet dwa okręty o masach 10 tys ton odległe od siebie o pięćset metrów doznawałyby, w najlepszym przypadku, siły zaledwie 0,06N, tj tyle co ciężar jednego cukierka. Ciała jeszcze mniejsze, jakimi możemy operować w laboratorium, wywołują siły odpowiednio mniejsze. Stosując bardzo czułe wagi można, mimo wszystko, zaobserwować i zmierzyć te maleńkie siły dla znanych mas umieszczonych w znanej odległości. Dokonano tego już w XVIIIw. Wyznaczona wartość (według dzisiejszego stanu wiedzy) wynosi:

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$

Stąd masa Ziemi wynosi

$$M_Z = 5,98 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$$

Wartość ta nie ma może za dużego znaczenia praktycznego dla większości z nas, ale dla geofizyków i geologów badających wnętrze Ziemi i kostruujących modele jej budowy, jest to istotny parametr pozwalający ustalić jakieś inne nieznane wielkości. Natychmiast możemy obliczyć średnią gęstość Ziemi. Wynosi ona 5,52g/cm^3. Środek musi być z istotnie innych materiałów niż warstwy zewnętrzne naszej planety, których średnia gęstość, znana z bezpośredniej obserwacji, wynosi $2,65\mathrm{g/cm}^3$. Powszechnie sądzi się że jądro Ziemi zawiera głównie żelazo.

Podobnie dla astrofizyków. Obserwacja ruchów pozwala wyznaczyć iloczyn masy ciała niebieskiego i stałej grawitacyjnej. Pozwala to określać stosunek mas. Dopiero pomiar stałej G na Ziemi, pozwala podać wartość mas gwiazd (i Słońca) bezpośrednio w kilogramach. I znów dla teorii gwiazd, jest to informacja bezcenna.

3.3 Energia

3.3.1 Energia pojedynczego punktu materialnego

Badając rzut do góry zauważyliśmy, że ciało po powrocie do poziomu wyrzucenia, uzyskuje tę samą, co w momencie wyrzucenia, wartość bezwzględną prędkości. Dotyczy to zresztą porównania prędkości nie tylko na początku i końcu ruchu, ale i na wszystkich wysokościach pośrednich przez które ciało przechodzi dwa razy.

Przyglądając się rzutowi obserwujemy ubywanie prędkości i towarzyszący temu wzrost wysokości. Gdy prędkość spadnie do zera, a wysokość osiągnie wartość największą zaczyna się proces odwrotny. Ubywa wysokości, a powraca wartość prędkości. Czy jest wielkość będąca sumą dwóch członów — jednego zależnego od prędkości, drugiego od wysokości, która przy tym pozostaje stała?

Zauważmy, że to „odzyskiwanie" prędkości, nie dotyczy jej znaku. Jeśli takie nowe prawo zachowania występuje w dynamice Newtona, wielkość zależna od prędkości musi nie zmieniać się po zmianie znaku prędkości (tak jak nie zmienia się kwadrat).

Przyglądając się wyrażeniom na prędkość i wysokość:

$$v = v_{\mathrm{p}} - gt, \quad h = v_{\mathrm{p}}t - \frac{1}{2}gt^2$$

bez trudu odkrywamy, że połowa kwadratu prędkości plus wysokość mnożona przez g jest wyrażeniem w którym nie występuje czas:

$$\frac{1}{2}v^2(t) + gh(t) = \frac{1}{2}v_{\mathrm{p}}^2 - v_{\mathrm{p}}gt + \frac{1}{2}g^2t^2 + v_{\mathrm{p}}gt - \frac{1}{2}g^2t^2 = \frac{1}{2}v_{\mathrm{p}}^2$$

O ile ubędzie w czasie ruchu wielkości $v^2/2$, o tyle przybędzie wielkości gh. Gdy zaczyna się ruch odwrotny następuje przemiana w drugą stronę. Wielkości powyższe mają cechy poznanej w szkole podstawowej, a także znanej z życia codziennego, energii. Oczywiście, gdy dwie cegły lecą obok siebie (zlepione, czy nie) z prędkością np. 1m/s, mają energii dwa razy więcej niż gdyby z tą prędkością leciała jedna cegła. Dlatego poznane przed chwilą prawo zachowania mnożymy stronami przez m i dopiero nazywamy ENERGIĄ:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \mathrm{const} = \mathrm{Energia}$$

Pierwszy człon nazywamy energią kinetyczną, drugi potencjalną. Zachęcamy Czytelnika do sprawdzenia, że w rzucie ukośnym (tam kwadrat prędkości zgodnie z tw. Pitagorasa jest sumą kwadratów prędkości obu ruchów składowych) jest identycznie. Mimo że położenie jest scharakteryzowane dwiema współrzędnymi: x i y, energia potencjalna jest zależna tylko od wysokości y.

Badanie prawa zachowania, w tym wypadku energii, gdy mamy pełne rozwiązanie równania Newtona, może być ciekawostką. O wiele użyteczniejsze jest **wiedzieć**, że takie prawo obowiązuje zanim się równania rozwiązało. Z różnych powodów rozwiązanie równania Newtona i wyznaczenie dokładne położenia w każdej przyszłej chwili może być trudne, czy wręcz niemożliwe, prawo zachowania — jeśli jest — pozwala wyciągać niektóre przynajmniej wnioski bez śledzenia ruchu w całym przedziale czasu.

W pierwszej kolejności rozważymy przypadek taki jak z rzuconą piłką w pobliżu Ziemi, tj. gdy jedno z oddziałującej pary ciał jest niesłychanie dużo masywniejsze od drugiego i może być uznane za spoczywające w układzie inercjalnym.

Przyjmijmy, zgodnie z zasadą determinizmu, że na ciało o masie m działa (działają) jakieś inne ciało, i że przekaz pędu (siła) zależy od położenia ciała i od prędkości. Mamy więc równanie Newtona: $ma = F$. Jest przyspieszenie, jest przyrost prędkości. Obliczmy przyrost energii kinetycznej, tak jak ją zdefiniowaliśmy dla przypadku szczególnego przed chwilą, jaki wystąpi w pewnym krótkim przedziale Δt.

$$m(v + a\Delta t)^2/2 - mv^2/2 = mva\Delta t + ma^2(\Delta t)^2/2$$

Jak we wszystkich tego typu rozważaniach, ponieważ przedział Δt jest mały, a w razie potrzeby może być wybrany jeszcze mniejszy, wyrazy zawierające iloczyn dwóch małych wielkości są pomijalnie małe[6].

Przyrost energii kinetycznej jest wystarczająco dokładnie (a w sensie rachunku różniczkowego zupełnie dokładnie) opisany tylko pierwszym członem po prawej stronie ostatniego wzoru. Zastępując ma siłą mamy:

$$\Delta E_{\text{kin}} = Fv\Delta t = F\Delta x$$

gdyż $v\Delta t = \Delta x$. Powyższy rezultat jest niesłychanie ważny. Nazywając iloczyn siły i przesunięcia *pracą*, możemy powiedzieć że:

[6] Można chyba powiedzieć że jest to najważniejsza idea opracowanego przez Newtona rachunku różniczkowego i całkowego z którego my tu w skromnym zakresie korzystamy, bez rozwijania pełnego formalizmu.

Przyrost energii kinetycznej równa się pracy siły działającej na ciało.

Powyższy wynik, ogólnie słuszny, nie oznacza jeszcze prawa zachowania energii. Wszystko zależy od tego jaka jest siła. Jeśli siła jest taka, że można pracę siły zapisać jako różnicę pewnej wielkości zależnej od początkowego i końcowego położenia (nazywanej wtedy energią potencjalną):

$$F\Delta x = E_{\text{pot}}(x) - E_{\text{pot}}(x+\Delta x) = -\Delta E_{\text{pot}}$$

wtedy, wstawiając powyższe przedstawienie pracy do poprzedniego wzoru dostaniemy:

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

To jest właśnie prawo zachowania. Możemy przenieść oba człony na jedną stronę i powiedzieć, że zmiana sumy energii jest równa zeru, albo przenieść obie energie (kinetyczną i potencjalną) odnoszące się do chwili wcześniejszej na jedną stronę równania, a energie odnoszące się do chwili późniejszej na drugą uzyskując równość energii całkowitych w różnych kolejnych fazach ruchu:

$$E_{\text{kin}}(t+\Delta t) + E_{\text{pot}}(x+\Delta x) = E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(x) = \text{const}$$

Przedstawienie pracy siły w postaci różnicy energii potencjalnych zależnych od położenia jest niemożliwe gdy siła zależy od prędkości. Nie będzie więc prawa zachowania energii mechanicznej gdy występują opory. Opory są zależne od prędkości bo działają zawsze przeciw ruchowi. Siła zależna tylko od położenia ma tę własność, że będąc taką samą w punkcie przez który ciało już raz przechodziło, wykonuje przy ponownym przejściu w odwrotą stronę pracę przeciwnego znaku co za pierwszym razem i to umożliwia przywrócenie wartości energii kinetycznej. Siła tarcia przy ruchu powrotnym zmienia znak i zawsze wykonuje pracę ujemną.

Zauważmy, że jeżeli pracę na małym odcinku możemy zapisać jako różnicę wyrażeń odnoszących się do końców odcinka, to suma prac na wielu przylegających odcinkach, sprowadzi się do różnicy **tylko dwóch** wyrażeń odnoszących się do początku i końca całej drogi. Energie potencjalne punktów pośrednich wystąpią w takiej sumie dwa razy — raz z plusem, raz z minusem.

W przypadku siły stałej o wielkości $-mg$ mamy dla pracy tej siły: $(x_2 - x_1)(-mg) = mgx_1 - mgx_2$, więc energia potencjalna jest rzeczywiście mgx (o ile współrzędną do góry nazwać x). Zauważmy, że w definicji energii potencjalnej kolejność punktów występująca w przesunięciu jest odwrotna niż ta która występuje w różnicy energii potencjalnych. Dzięki temu, po przeniesieniu pracy wyrażonej różnicą energii potencjalnych na lewą stronę dostajemy w prawie zachowania sumę wyrażeń, a nie różnicę.

Zauważmy także, że skoro można napisać $(x_2 - x_1)(-mg) = mgx_1 - mgx_2$, to można też napisać: $(x_2 - x_1)(-mg) = (mgx_1 + C) - (mgx_2 + C)$, gdyż stała C się skróci. Nowa energia potencjalna $mgx + C$ jest większa o C; mimo to wyliczona z niej praca między dwoma punktami jest taka sama, a tylko to praktycznie jest nam potrzebne. Wybór takiej, a nie innej stałej, oznacza wybór miejsca od którego liczymy wykonaną pracę. W przypadku siły ciężkości i energii mgh oznacza to wybór poziomu odniesienia od którego liczymy wysokość.

Energia potencjalna pojawiła się jako wielkość której zmiana między punktami sąsiednimi równa jest pracy siły. Przepisując tę definicję nieco inaczej mamy:

$$F = -\frac{E_{\text{pot}}(x + \Delta x) - E_{\text{pot}}(x)}{\Delta x}$$

Napotykamy znany już z rozważań nad prędkością i przyspieszeniem iloraz przyrostu wartości przez przyrost zmiennej niezależnej (dla bardzo małych przyrostów). Dotychczas tą zmienną był czas, teraz jest to współrzędna. Dla matematyki nie ma to większego znaczenia. Obliczenia przebiegają identycznie.

Oprócz poznanej energii potencjalnej proporcjonalnej do pierwszej potęgi położenia, opisującej pracę siły stałej, w fizyce wielkie znaczenie mają jeszcze dwie (szczególnie na poziomie szkoły) energie potencjalne: jedna proporcjonalna do drugiej potęgi położenia, druga odwrotnie proporcjonalna do położenia. Zbadajmy pracę jakich zmiennych sił opisują te dwie funkcje.

$$E_{\text{pot}} = C/r, \qquad F = -\frac{C/(r + \Delta r) - C/r}{\Delta r} = \frac{C}{r(r + \Delta r)}$$

Tak obliczona siła jest siłą średnią, siłę w punkcie dostaniemy kładąc w końcowym wyniku $\Delta r = 0$. Wtedy siła staje się równa C/r^2. Ostatecznie:

Sile C/r^2 odpowiada energia potencjalna C/r

Dla energii potencjalnej kwadratowej:

$$E_{\mathrm{pot}} = kx^2/2 \qquad F = -\frac{k(x+\Delta x)^2 - kx^2}{2\Delta x} = -kx - k\Delta x/2$$

I ta siła jest siłą średnią. Siłę lokalną dostaniemy kładąc $\Delta x = 0$.

Sile $-kx$ odpowiada energia potencjalna $kx^2/2$.

Potencjał siły odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości ma zastosowanie do sił grawitacji i do sił elektrycznych (działających między naładowanymi składnikami materii). Trudno wprost przecenić jego ważność.

Spytajmy o to, jaką prędkość trzeba nadać na powierzchni Ziemi (lub innego obiektu działającego siłą przyciągania zgodną z prawem grawitacji) ciału, by mogło ono oddalić się na nieograniczoną odległość. W przypadku przyciągania siła działa przeciwnie niż promień, stała $C = -GMm$ jest więc ujemna. Łączna energia składa się na początku z dodatniego składnika energii kinetycznej i ujemnego potencjalnej. W miarę wznoszenia ujemny składnik staje się coraz bliższy zeru — początkowa wartość energii staje się („w nieskończoności") równa już tylko energii kinetycznej. Ale ta jest zawsze nieujemna. Wniosek: By dotrzeć do nieskończoności, ciało musi mieć energię całkowitą nieujemną, czyli kinetyczną większą od wartości bezwzględnej energii potencjalnej:

$$mv^2/2 \geq GmM/R$$

Prędkość dana powyższym wzorem ze znakiem równości nosi nazwę *drugiej prędkości kosmicznej*. Jest ona dokładnie o czynnik $\sqrt{2}$ większa od prędkości niezbędnej do utrzymania ciała na orbicie kołowej o promieniu R. Dla Ziemi to 11,2km/s.

Przypadek siły proporcjonalnej do odległości od pewnego punktu nie odpowiada wprawdzie określonemu oddziaływaniu, takiemu jak grawitacja, czy elektryczność, ale ma ogromne znaczenie z innego powodu.

Często oddziaływanie ciał (będące wynikiem dowolnie skomplikowanej sytuacji wewnątrz tych ciał) ma taką własność, że jest odpychające na małych odległościach i słabnie wraz ze wzrostem odległości osiągając zero dla pewnego położenia, poza którym siła zmienia znak.

Jest to jedyny przebieg oddziaływania gwarantujący możliwość równowagi trwałej. Istotnie, punkt w położeniu $x = 0$ (umawiamy się mierzyć współrzędną od punktu znikania siły) nie podlega działaniu siły i jeśli miał prędkość początkową zero, będzie w bezruchu. Co się jednak stanie, gdy — z powodu nieuniknionej niedokładności — umieścimy go trochę obok tego położenia równowagi, albo za daleko, albo za blisko. Jeśli $x > 0$ zadziała siła ujemna i ciało zacznie nabierać prędkości w lewo. Niewiele zdąży się rozpędzić, bo niebawem po osiągnięciu $x = 0$ siła zmienia znak i zamiast rozpędzania zaczyna się hamowanie. Ciało będzie oscylować wokól $x = 0$ z niewielką amplitudą.

Jak parokrotnie zwracaliśmy uwagę, na krótkim odcinku wykres dowolnej linii gładkiej, jest w doskonałym przybliżeniu identyczny z odcinkiem prostej. W tym małym przedziale drgań wokół położenia równowagi, zastąpienie prawdziwej zależności siły od położenia zależnością wprost proporcjonalną jest dobrze uzasadnione. Od konkretnego przypadku zależeć będzie tylko współczynnik proporcjonalności k. Siły proporcjonalne do wychylenia odgrywają wielką rolę przy opisie rozmaitych drgań i fal, o ile ich amplitudy są wystarczająco małe.

3.3.2 Energia układu ciał

Rozważania poprzedniego podrozdziału prowadzone były przy upraszczającym założeniu, że źródło siły dla naszego ciała jest nieskończenie masywne, i że jego ruchem nie musimy się zajmować. W tym punkcie rozważymy sprawę zachowania energii ogólniej, gdy nie można pominąć udziału w energii żadnego z oddziałujących ciał. Równoczesny ruch ciał powoduje, że zmiana położenia ciała względem układu inercjalnego występująca w obliczaniu pracy nad tym ciałem wykonywanej nie jest identyczna ze zmianą położenia względnego od którego zależy siła. Powoduje to iż pracy nad jednym tylko ciałem nie da się wyrazić przez różnicę energii potencjalnej.

Okazuje się że kłopot jest łatwo usuwalny. Trzeba — co bardzo intuicyjnie zrozumiałe — rozważyć **łączny** przyrost znanych już nam energii kinetycznych oddziałujących ciał.

$$\Delta E_{\text{kin},1} + \Delta E_{\text{kin},2} = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2$$

Siły wzajemnego oddziaływania mają przeciwny znak. Oznaczając siłę na pierwsze ciało (ze strony drugiego) literą F, mamy: $F_1 = F$, $F_2 = -F$ i bilans energii jest:

$$\Delta(E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2}) = F(\Delta x_1 - \Delta x_2) = F\Delta(x_1 - x_2)$$

Uzyskaliśmy po prawej stronie iloczyn siły (zależnej zawsze od położenia względnego) przez zmianę **tegoż właśnie** położenia względnego: $(x_1 - x_2)$. Iloczyn ten jest ujemnym przyrostem energii potencjalnej zależnej od tegoż położenia względnego. Z punktu widzenia obliczeń pracy jest wszystko jedno, czy nie ruszając lewego ciała przesunę prawe o np. 2 metry w prawo, czy przesunę prawe o metr w prawo, a potem lewe o metr **w lewo**. Ponieważ ta druga siła jest **przeciwna**, w ruchu w lewo zostanie wykonana taka sama praca jak przy przesuwaniu ciała prawego pomiędzy 1m a 2m w poprzednim przypadku. Wszystkie nasze poprzednie obliczenia energii potencjalnej pozostają użyteczne, należy jedynie przez występujące tam położenia rozumieć odległości względne oddziałujących ciał.

Sama energia potencjalna jest wspólną dla obu ciał. Jest to energia **pary**, a nie każdego z ciał z osobna. A zatem:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + E_{\text{pot}}(x_1 - x_2) = \text{const} = \text{energia całkowita}$$

Energia całkowita układu wielu ciał oddziałujących parami (jak w przypadku grawitacji) jest sumą tylu składników energii kinetycznej, ile ciał w układzie, i tylu składników energii potencjalnej, ile różnych par w tymże układzie. Dla dwóch ciał jest jedna para, dla trzech — trzy, ale dla czterech aż sześć. Dla większej liczby oddziałujących punktów materialnych ilość par gwałtownie rośnie.

Energię kinetyczną wygodnie jest przedstawić w zależności od pędu:

$$E_{\text{kin}} = mv^2/2 = m^2v^2/(2m) = p^2/(2m)$$

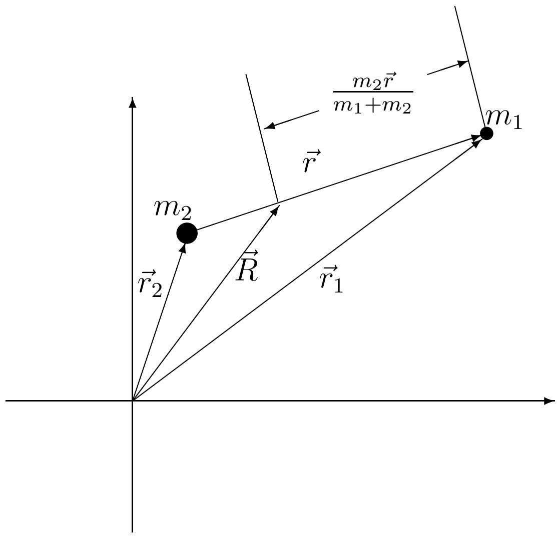
Ciało o dużej masie — wbrew pozorom — nie ma wcale dużej energii kinetycznej, gdy jego pęd jest taki jak pęd ciała lekkiego. Taką sytuację spotykamy wyrzucając piłkę z Ziemi do góry. W układzie odniesienia w którym i piłka i Ziemia spoczywały na początku, Ziemia uzyska taki sam pęd (o przeciwnym kierunku jedynie) jak piłka (prawo zachowania pędu). Jej energia będzie żałośnie mała! Można o niej zapomnieć w ogólnym bilansie. Prowadzi to do sytuacji jaką rozpatrywaliśmy na początku. Energia oddziaływania: mgh, pozostając cały czas energią pary, jest trochę bezprawnie nazywana energią potencjalną tego lekkiego ciała.

Podobnie przy strzelaniu z karabinu. Po wystrzale pęd pocisku i pęd karabinu, co pozostał nam w ręku, są równe. Energia karabinu — na szczęście dla strzelającego — jest dużo mniejsza od energii pocisku, choć wcale nie taka mała. Gdy się źle, to znaczy luźno, trzyma broń, mocno zaboli obojczyk. Gdy karabin mocno do ramienia dociśniemy, zwiększamy efektywnie odrzucaną masę i zmniejszamy dodatkowo przekaz energii.

3.3.3 Energia wewnętrzna

Energia potencjalna oddziaływania zależy tylko od odległości względnej ciał i w związku z tym nie zależy od tego z jakiego układu odniesienia prowadzimy ich obserwację i opis. W przeciwieństwie do tego, każda z energii kinetycznych, a także ich suma zależy od układu odniesienia. (Nieruchoma względem torów gałązka, jakże boleśnie może nas ugodzić gdy, wbrew przepisom, będziemy się wychylać przez okno z pędzącego pociągu!)

Łączną energię kinetyczną oddziałujących wzajemnie ciał można przedstawić jako sumę części niezależnej od układu z którego prowadzimy obserwację i części zależnej, ale w bardzo prosty sposób. Dopiero to przedstawienie pozwoli nam naprawdę zrozumieć dlaczego ciała złożone z części mogą być pod pewnymi względami traktowane tak jak punkty materialne. Dopiero to przedstawienie pozwoli nam zrozumieć ograniczenia, jakie nasuwają się przy stosowaniu metody Newtona (zasady determiniznu) do zwykłych ciał. Obiekty astronomiczne — bardzo odległe w stosunku do swych wymiarów, oraz cząstki elementarne i inne składniki materii mają swoje uniwersalne, proste prawa oddziaływania. Ruchy ciał złożonych takich jak: piłki, pociągi, tłoki silników, części maszyn, statki, pociski artyleryjskie, które zwyczajowo trakuje się w wykładach mechaniki tak jak ruchy planet, sprawiają szereg istotnych problemów zmuszających często do wyjścia poza metody mechaniki, poza metodę determinizmu.



Rozważania poprowadzimy dla dwóch tylko ciał, wskazując które wyniki mają znaczenie ogólnie słuszne, nawet dla miliardów składników. Przypomnijmy układ Ziemia-Księżyc i wprowadzony przy tej okazji środek masy. W układzie środka masy położenia ciał wyrażają się przez wektor położenia względnego $\vec{r}$ wzorem:

$$\vec{r'}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r'}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Względem dowolnego innego układu odniesienia środek masy opisany jest wektorem $\vec{R}$, współrzędne ciał w tym układzie wynoszą więc:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Wprowadźmy teraz dwie prędkości: $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ i $\vec{V} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}$. Prędkości te mają swoje nazwy: *prędkość ruchu względnego* i *prędkość środka masy*. Prędkość środka masy poznaliśmy wcześniej. Ma ona tę własność, że $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P} = M\vec{V}$.

Korzystając z tych definicji łatwo obliczymy prędkości indywidualnych ciał:

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad \vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

Przystępujemy teraz do obliczenia sumy energii kinetycznych. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa kwadrat prędkości, to suma kwadratów poszczególnych współrzędnych. Kiedy będziemy pisali $\vec{A}^2$, oprócz pamiętania, że jest to A^2 (A to wartość wektora), często będziemy korzystali z tego że:

$$A^2 = \vec{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

W pierwszej chwili wydaje się, że czeka nas dużo obliczeń i dużo pisania, ale to tylko pozory. Zajmijmy się obliczeniem kwadratów składowych prędkości na jedną z osi — dla pozostałych wszystko będzie wyglądało identycznie:

$$m_1 v_{1,x}^2 + m_2 v_{2,x}^2 = m_1 (V_x + \frac{m_2}{M} v_x)^2 + m_2 (V_x - \frac{m_1}{M} v_x)^2 =$$

$$= M V_x^2 + \frac{m_1 m_2}{M} v_x^2$$

Ważne jest że zredukowały się człony mieszane. Decydujące znaczenie dla tej redukcji członów mieszanych z obu kwadratów miało pojawienie się tego samego iloczynu $m_1 m_2$. W pierwszym członie mieszanym pierwsza masa pochodzi z tego że energia kinetyczna jest proporcjonalna do masy, ale druga stąd, że położenie pierwszej masy jest w środku masy proporcjonalne do m_2 — i analogicznie dla drugiego ciała. Dla jakiegoś innego punktu na odcinku łączącym masy — np. dla środka geometrycznego, obranego jako początek układu współrzędnych, — tej ważnej własności by nie było.

Dopisując niezbędne połówki i sumując po współrzędnych dostajemy:

$$\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^2}{2} = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{m_1 m_2 \vec{v}^2}{2(m_1+m_2)}$$

Wielkość o wymiarze masy:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

nazywa się *masą zredukowaną*.

Ostatecznie pełna energia układu oddziałujących ciał wynosi:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \left(\frac{1}{2}\mu v^2 + E_{\mathrm{pot}}(\vec{r})\right)$$

Ten drugi człon, niezależny od układu odniesienia z którego prowadzimy obserwację, bo zależny tylko od względnego położenia oddziałujących ciał i szybkości zmian tego położenia, nosi nazwę *energii wewnętrznej*. Można ją też interpretować jako pełną energię dla obserwatora posługującego się układem środka masy.

Człon pierwszy ma wszystkie własności energii kinetycznej pojedynczego punktu materialnego. Nazywa się go *energią kinetyczną środka masy*, albo energią kinetyczną układu jako całości.

Całkowita energia układu ciał, oddziałujących tylko ze sobą, jest sumą energii wewnętrznej i energii kinetycznej całości.

Całkowita energia w układzie spoczynkowym środka masy pokrywa się z energią wewnętrzną. Dlatego energię wewnętrzną nazywa się też *energią spoczynkową*

Udowodniliśmy to twierdzenie na gruncie mechaniki Newtona, dla układu dwóch punktów materialnych. Bez trudu można udowodnić, że jest ono słuszne dla dowolnej ilości punktów oddziałujących parami siłami potencjalnymi.

Rozwój fizyki przez wszystkie lata, do dzisiaj, potwierdził, że jest to prawdą ogólną. Każdy układ ciał nie wyrzucający już niczego z siebie, o dowolnym składzie, spełnia powyższe twierdzenie.

Charakter fizyczny *energii wewnętrznej* może być przy tym inny niż możemy sobie wyobrazić w oparciu o mechanikę Newtona[7].

Istnienie powyższego, bardzo ogólnego rozkładu, jest szczególnie ważne, gdy nie postrzegamy bezpośrednio składników ciała złożonego. Jeśli sytuacja wewnętrzna, a więc i energia wewnętrzna, jest niezmienna, cały układ zachowuje się jak pojedynczy punkt materialny. Oddziałując z innymi ciałami odbiera im pęd i energię tak jakby to robił pojedynczy punkt o masie M, położeniu $\vec{R}$, prędkości $\vec{V}$, pędzie $M\vec{V}$ i energii kinetycznej $MV^2/2$.

Ale powyższy rozkład uświadamia nam też, że przy oddziaływaniu ciał złożonych małe są nadzieje, by często się zdarzało, że oddziaływanie nie naruszy stanu wewnętrznego. Wystarczy popatrzeć jak wyglądają po zderzeniu dwa samochody! Skoro może się zmieniać energia wewnętrzna (skryta często przed naszymi oczami), energia zewnętrzna ciał, na której chcielibyśmy się skupić, nie ma na ogól prawa się nie zmieniać.

Możliwość opisu ruchu ciał makroskopowych (złożonych z dużej liczby atomów) tak, by wymigać się od analizy tego co dzieje się z energią wewnętrzną jest raczej wyjątkiem niż regułą! Formuły sił dla ciał makroskopowych mają prawie zawsze charakter przybliżony. Są one też przeważnie dość skomplikowane. Błędem jest sądzić dzisiaj, że przyrodę da się opisać metodą, która tak świetnie się sprawdziła dla ciał niebieskich. Potrzebne są nowe pojęcia i nowe metody. Są one nieustannie tworzone i rozwijane. Fizyka nie jest nauką zakończoną.

Spoglądając wstecz na to co już zrozumieliśmy widzimy, że prawo zachowania energii w teorii Newtona nie jest koniecznością logiczną. Gdyby siły, których istnienie wynika z zasady determinizmu — nawet dla najmniejszych składników — nie były potencjalne (tak jak siły tarcia które znamy dla ciał makroskopowych) nie istniało by pojęcie energii całkowitej. Ale w połowie XIX w., gdy odkryto, że przepływ ciepła to przekaz energii, tyle że angażujący zmiany stanu wewnętrznego, i że ginąca z pola widzenia, w związku z tarciem, energia czysto mechaniczna, odnajduje się we wcześniej nieuświadamianej energii wewnętrznej, zrodziło się przekonanie, że dla

[7]Także postać energii kinetycznej całości ulega modyfikacji przy wyjściu poza przybliżenie Galileusza. Piszemy o tym dalej.

oddziaływań najmniejszych składników, zasada zachowania energii musi jednak obowiązywać. Była to w fizyce klasycznej hipoteza, w stosunku do zasad dynamiki, dodatkowa. Zwie się ją I Zasadą Termodynamiki.

Zasada demokracji układów inercjalnych, ale traktowana ściśle, nie po galileuszowemu, jest pod względem energii dużo bardziej wymagająca i dużo więcej mówiąca niż teoria Newtona. Nawet bez wprowadzania jakiegokolwiek pojęcia siły, odkryliśmy dla oddziaływań ciał, które są swobodne do pewnego momentu, i swobodne ponownie od pewnego momentu, prawo zachowania sum wielkości:

$$\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}}$$

Wielkość ta zawiera kwadrat prędkości — ma zapewne wiele wspólnego z energią. Aby się o tym przekonać, odejmijmy i dodajmy do niej masę m:

$$\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}} - m + m = m + \frac{m - m\sqrt{1-Cv^2}}{\sqrt{1-Cv^2}} =$$
$$= m + C\frac{mv^2}{(1-Cv^2) + \sqrt{1-Cv^2}}$$

Skoro prawu zachowania podlega powyższa wielkość, prawu zachowania podlega też ta wielkość po pomnożeniu jej (dla wszystkich ciał) przez $c^2 = 1/C$. Zatem, wielkość spełniającą prawo zachowania można rozłożyć w sposób następujący:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{mv^2}{1-v^2/c^2+\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + T$$

Gdy prędkości nie są zbyt bliskie c, drugi człon to nic innego jak $mv^2/2$! Gdy po zderzeniu cząstek nie zmieniają się ich masy, dyskutowane prawo sprowadza się do ścisłego zachowania sumy wielkości $T = mv^2/(1-Cv^2+\sqrt{1-Cv^2})$. To po prostu **jest** ścisła formuła na energię kinetyczną, zastępująca przybliżenie przedeinsteinowskie $mv^2/2$. Gdy suma mas zderzających się ciał nie ulega zmianie, zasada demokracji po lorentzowsku (może słuszniej mówić po einsteinowsku) wymusza więc prawo zachowania energii kinetycznej.

Zasada ta dopuszcza zmianę sumy energii kinetycznych wtedy i tylko wtedy jeśli zmieniają się masy. W teorii klasycznej zmiany energii kinetycznych są równe zmianom energii wewnętrznych, rozpoznawanych np. po zmianie temperatury, ale przy (pozornie[8]) stałej masie. Teoria einsteinowska **wyraża** zmiany energii kinetycznych przez masy. Np. dla procesu: $m_1 + m_2 \longrightarrow m_3 + m_4$:

$$T_1 + m_1c^2 + T_2 + m_2c^2 = T_3 + m_3c^2 + T_4 + m_4c^2$$

Przyrost energii kinetycznych wyrazi się przez ubytek sumy mas:

$$T_3 + T_4 - (T_1 + T_2) = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2$$

Jasne jest, że wyrażenie mc^2 należy utożsamić z energią wewnętrzną. Suma tej energii i energii kinetycznej daje energię całkowitą:

$$E_{\text{całk}} = mc^2 + T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Energia całkowita spoczywającej (jako całość) cząstki, czyli jej energia wewnętrzna mc^2 rzuca pewne światło na naturę masy. W fizyce klasycznej masę się po prostu wyznaczało przez porównanie z wzorcem. O masie także było wiadomo iż jest równa sumie mas składników.

Według dokładnej teorii relatywistycznej, masa jest proporcjonalna do energii wewnętrznej. Masa układu złożonego nie wymaga — w zasadzie — by same składniki miały masę!

[8]Energie typowe dla reakcji chemicznych, czy energie związane z ogrzewaniem ciał do „zwyczajnych temperatur” pociągają za sobą tak mikroskopijne zmiany masy ciała, że nijak się tego nie da zaobserwować i zmierzyć.

Wystarczy umieć jakoś zamknąć w skończonym obszarze energię (czegokolwiek), by cały ten układ miał masę.

Zdumiewające wnioski do jakich można dojść stawiając pytania najogólniejsze — o Wszechświat i jego początek — opierają się na obserwacji, że energia potencjalna grawitacji jest ujemna (Dla dwóch mas $-GMm/r$). Energia materii (spoczynkowa mc^2 plus kinetyczna) jest dodatnia. Jeśli Wszechświat jest odpowiednich rozmiarów — nie za duży, nie za mały — jego łączna energia może być (prawie na pewno jest!) równa zeru.

Wszechświat taki może „wybuchnąć" Z NICZEGO. Cząstki masywne powstają kosztem energii uzyskanej stąd, że pojawia się ujemna energia grawitacji tychże cząstek. To jest idea Big Bangu.

Oświeceniowe idee o wieczności materii i jej ruchu odłożono w XX w. do lamusa. Odeszliśmy bardzo daleko od idei Newtona, ale gdyby on nie zrobił swojego ważnego kroku, ktoś inny musiałby to najpierw zrobić za niego!

Rozdział 4

Mechanika ciał ziemskich

4.1 Rodzaje oddziaływań w przyrodzie

Uniwersalność prawa zachowania energii całkowitej (włączając w to energię wewnętrzną) oznacza, że dla oddziaływąń najmniejszych składników obowiązywać powinny proste siły mające jakiś potencjał. Istotnie, naładowane składniki atomów — jądra i elektrony — podlegają niezwykle prostemu prawu oddziaływania — energia potencjalna tego oddziaływania kQ_1Q_2/r jest matematycznie niemal identyczna z energią potencjalną oddziaływania grawitacyjnego. Jedyna różnica (o poważnych konsekwencjach) jest taka, że — w przeciwieństwie do zawsze przyciągającej grawitacji — siły elektryczne są przyciągające dla cząstek przeciwnych znaków, a odpychające dla znaków zgodnych. Protony, dzięki obecności których jądra atomowe mają ładunki, są dodatnie; elektrony są ujemne. Przy pewnym wyborze stałej k parametry Q podane powyżej są liczbami całkowitymi (W zwykłych jednostkach liczby te są wielokrotnościami ładunku elementarnego). Dla jąder parametry te zmieniają się od 1 do 105. Największy ładunek spośród jąder występujących naturalnie w przyrodzie ma Uran — 92 ładunków elementarnych; pozostałe zostały wytworzone w laboratorium.

Jądra atomowe o Z protonach łączą się z Z elektronami tworząc obojętny atom. W przeciwieństwie do grawitacji, gdzie gromadzenie materii w jednym obszarze zwiększało w prosty sposób oddziaływanie z odległą masą, atom obojętny nie oddziałuje z odległym ładukiem prawie wcale. Szczątkowe oddziaływanie wypadkowe zależy od szczegółów rozmieszczenia ładunków dodatnich i ujemnych, "żerując" na drobnych różnicach w odległości jednych i drugich. Jest jasne, że oddziaływanie atomów — mimo że są to układy złożone ze składników oddziałujących prosto i uniwersalnie — jest skomplikowane i, ściśle biorąc, nie bardzo dające się opisać energią potencjalną. Przy zderzeniach zbyt energicznych atomów rozpadają się one na składniki. Im większe układy, tym trudniej wywnioskować ich własności z samej wiedzy o siłach elektrycznych.

Tym niemniej, oprócz tych fundamentalnych oddziaływań elektrycznych (ściślej: elektromagnetycznych) i grawitacji, żadne inne **dodatkowe** oddziaływania do opisu zachowania substancji złożonej z atomów nie są w zasadzie potrzebne[1]. Ale policzyć jak powinien się zachować kryształ diamentu, czy cząsteczka białka, jest bardzo trudno[2].

Na żadne proste uniwersalne formuły oddziaływań nie ma co liczyć! „Zwyczajne" ciała — oprócz grawitacji i rzadkich przypadków ciał makroskopowych naładowanych — oddziałują, tzn przekazują sobie pęd, za pośrednictwem swoich atomów i to tych które bezpośrednio się stykają. Będą to siły spoistości, sprężystości, tarcia, oporu. Pewną wiedzę o tych siłach fizycy nagromadzili, nie ma ona tak uniwersalnej i eleganckiej formy jak wiedza o siłach grawitacji.

4.2 Ciśnienie gazu

Jedną z najprostszych sytuacji w której możemy ustanowić prawo przepływu pędu między ciałami, przepływu innego niż wymagany przez prawa fundamentalne, jest oddziaływanie pomiędzy gazem, a zamykającym go w naczyniu tłokiem. Weźmy pionowo ustawiony cylinder zamknięty od góry tłokiem o pewnej masie m. Tłok swobodnie może suwać się wzdłuż ścianek cylindra — gdyby z obu stron

[1]Istnieją jeszcze 2 oddziaływnia odpowiedzialne za budowę jąder i za przemiany promieniotwórcze. Ich potencjały spadają wraz z odległością jak postęp geometryczny — o czynnik mniej więcej 10 na każde 10^{-14}m w pierwszym, i 10^{-17}m w drugim przypadku. Na zachowanie atomów oddziaływania te nie mają żadnego bezpośredniego wpływu.

[2]Ważną kwestią, którą tu musimy pominąć, jest konieczność stosowania praw kwantowych do opisu zachowań układów atomowych.

odpompować powietrze, tłok spadał by z przyspieszeniem $a_y = -g$.

Gdy jednak w cylindrze jest gaz (dla prostoty załóżmy, że na zewnątrz jest próżnia) tłok nie opada! Jeśli obserwujemy go (po pewnej liczbie wahnięć w górę i w dół, być może) w sytuacji statycznej, nieruchomej, musimy odpowiedzieć na pytanie: co się dzieje z pędem dostarczanym tłokowi przez oddziaływania grawitacyjne z Ziemią, w ilości mg na każdą sekundę. Gdyby nie gaz, ten wpływający strumień objawiałby się wzrastającym pędem (a więc i wzrastającą szybkością) tłoka. Tłok po prostu by spadał z przyspieszeniem g. W sytuacji statycznej stwierdzamy, że do tłoka napływa od dołu przeciwny strumień pędu! (albo co na jedno wychodzi, że pęd dostarczany tłokowi przez grawitację skierowany do dołu jest oddawany, przekazywany, substancji gazu).

Gaz jest przezroczysty, nic nie widać. Ludzie mają jednak wyobraźnię! Już w XVIII w. (pod koniec) Bernoulli wysunął i zanalizował hipotezę, że substancja nazywana gazem, to rojowisko cząsteczek, małych w stosunku do średnich między nimi odległości, fruwających w te i we wte, odbijających się od ścianek naczynia, czasami zderzających się ze sobą. Cząsteczka gazu uderzając w gładki tłok odbija się od niego. Oddziaływanie — ze względu na symetrię — może przekazać pęd prostopadły do tłoka. Składowa równoległa się przy tym nie zmieni. Prawo zachowania energii (gdzież by się podziewała skoro sytuacja jest unormowana, statyczna, nic się generalnie nie dzieje, nie zmienia) pozwala w tej sytuacji jedynie zmienić znak prędkości (a więc pędu) w kierunku osi cylidra.

Oznaczając tę prędkość v_y, zmianę pędu cząstki obliczamy jako: $-mv_y - mv_y = -2mv_y$. Zmiana pędu tłoka ma znak przeciwny i wynosi $2mv_y$. Jest to jednorazowa porcja pędu uzyskana od jednej cząstki w jednym zderzeniu. Uderzeń w ciągu sekundy jest dużo węcej. Nawet ta właśnie rozpatrywana cząstka może zdążyć dolecieć do przeciwległej ścianki, odbić się i ponownie uderzyć wiele razy w ciągu sekundy[3].

[3]Odbicia od ścianek bocznych nie mają znaczania ani dla czasu lotu, ani dla wartości pędu p_y, który tu rozpatrujemy. Kłopotliwszą komplikację stwarzają zderzenia z innymi cząstkami gazu. Należy sobie wyobrażać, że wytrąceniu w zderzeniu cząstki ze stanu o wartości v_y do innego towarzyszy (statystycznie) zderzenie, w którym jakaś inna cząstka zmienia prędkość akurat w odwrotną stronę. Gdyby tak nie było, stan gazu ulegałby istotnym zmianom, aż w końcu

Przyjmując że wysokość cylindra jest L, znajdujemy że czas powrotu wynosi $2L/v_y$. Odwrotność tego mówi ile razy na sekundę ta cząstka przekaże pęd $2mv_y$. A zatem przekaz pędu — już w ciągu sekundy — od jednej cząstki wynosi: $2mv_y/(2L/v_y) = mv_y^2/L$. Pęd przekazywany w ciągu sekundy od wszystkich cząstek jest sumą takich wyrażeń dla wszystkich cząstek w naczyniu.

Ze względu na symetrię wszystkich kierunków jest prawie oczywiste, że suma kwadratów składowych prędkości wszystkich cząstek jest jednakowa dla każdego kierunku. Oznaczmy ją A. Trzy takie sumy składają się, zgodnie z Pitagorasem, na sumę kwadratów **całych** prędkości. Zatem:

$$3A = \text{Suma}(v_y^2) + \text{Suma}(v_x^2) + \text{Suma}(v_z^2) = \text{Suma}(v^2)$$

Ostatecznie pęd przekazywany do tłoka wynosi:

$$\frac{mA}{L} = \frac{m \times \text{Suma}(v^2)}{3L} = \frac{2}{3L}\text{Suma}(mv^2/2) = \frac{2}{3L}E_{\text{kin całkowita}}$$

Pęd ten to inaczej siła działająca na tłok ze strony gazu. Wygodnie jest operować nie siłą, lecz *ciśnieniem*, czyli przekazem pędu na jednostkę powierzchni. Wyliczony powyżej przekaz trzeba podzielić przez powierzchnię S. Oznaczając ciśnienie P mamy:

$$P = \frac{2}{3}E_{\text{kin całkowita}}\frac{1}{SL}$$

Ale SL to objętość gazu: V. Mnożąc stronami przez to V dostajemy:

$$PV = \frac{2}{3}E_{\text{kin całkowita}}$$

Jest to klasyczny przykład wyznaczenia szybkości przekazu pędu nie przez postulowanie nowych oddziaływań fundamentalnych, lecz przez analizę tego co się w danej sytuacji rzeczywiście dzieje, z zastosowaniem praw i oddziaływań ustalonych wcześniej. W powyższej sytuacji, na wyprowadzenie wpływ mają założenia o prawach zachowania energii i pędu oraz założenia o istocie samego

ustaliłby się stan równowagi w którym te ilości zderzeń zmieniających prędkość z jednej wartości na drugą i na odwrót, by się zrównały. Zakładamy że taki właśnie stan równowagi obserwujemy.

gazu. Założenia poczynione przez Bernoulliego są najprostsze do pomyślenia. Są one pewną idealizacją i jest kwestią ewentualnych badań w jakich okolicznościach, dla jakich gazów, uzyskany wynik jest dobrym przybliżeniem. Tak żmudnie trzeba zdobywać wiedzę o materii.

Wyliczone ciśnienie (więc i siła) robi wrażenie dobrze określonej funkcji położenia tłoka L. Pozornie możnaby użyć tej siły w równaniu Newtona dla wyznaczenia ruchu tłoka ustawionego początkowo w położeniu innym niż równowagi, albo wytrąconego z tego położenia nadaniem mu nagle prędkości początkowej.

Ale nie jest tak dobrze! Na takiej drodze czekają liczne pułapki. Po pierwsze, siła zależy od całkowitej energii kinetycznej cząstek gazu. A ta przy ruchu tłoka zacznie się zmieniać. Jak? Ba, to rozległy problem, zależny m.in. od rodzaju ścianek (dobry czy zły przewodnik ciepła). Po drugie, przy szybkim ruchu tłoka występuje w jego pobliżu zgęszczenie (przy zmniejszaniu objętości) lub rozrzedzenie gazu. Faktyczny przekaz pędu, w tym samym położeniu tłoka, jest większy przy sprężaniu, mniejszy przy rozprężaniu niż wyliczony powyżej przy założeniu równomiernego rozkładu gazu w naczyniu. Praca siły przy powrocie będzie więc mniejsza niż przy pierwszym przejściu.

Drgania tłoka w powyższej konfiguracji przestają należeć do mechaniki Newtona. Nie ma formuły na siłę przy prędkości innej niż zerowa. Aby taką formułę znaleźć, trzebaby dużo głębiej i dokładniej opisać zachowanie gazu. Ze względu na niewyobrażalnie wielką ilość cząsteczek (ok 10^{19} w centymetrze sześciennym w warunkach normalnych), do opisu ich zachowania nie mogą być użyte szczegółowe równania ruchu, i koło się zamyka.

Rozwinięto inne działy: termodynamikę, fizykę statystyczną, aerodynamikę by skutecznie analizować takie problemy. Znajomość samego prawa: siła $=$ masa $\times$ przyspieszenie jest tu dalece nie wystarczająca, właściwie nic nie daje.

4.3 Napęd rakietowy

Dzięki zasadzie zachowania pędu, odrzucenie części jakiegoś obiektu posiadającej masę Δm i prędkość w powoduje nadanie reszcie obiektu o masie m prędkości proporcjonalnie mniejszej: $(\Delta m/m)w$ — oczywiście zwróconej przeciwnie do prędkości wylotu spalin. Tak jest w układzie w którym obie masy na początku spoczywały. Jeśli był to układ inercjalny już pędzący z prędkością v względem nas, to powiemy że prędkość pozostałości, wskutek tego odrzucenia, wzrosła od wartości v o dodatkowe $\Delta v = (\Delta m/m)w$.

Silnik odrzutowy wyrzuca spaliny z prędkością w względem rakiety w sposób rozciągnięty w czasie. Nie popełnimy jednak wielkiego błędu, gdy wydzielimy (w myśli) maleńką porcyjkę wyrzuconą w ciągu krótkiego czasu pracy silnika jako jedno ciało[4]. Oznaczmy ułamek $\Delta m/m$ jako $1/n$. Wtedy $\Delta v = w/n$. Jeśli masa na początku była M, to pozostałość ma masę $M\frac{n}{n+1}$.

Po wyrzuceniu tej małej porcyjki natychmiast zabieramy się za wyrzucenie drugiej porcyjki. Nic nie stoi na przeszkodzie wybrać ją nie o takiej samej masie jak poprzednio, lecz jako ułamek $1/n$ tego co pozostanie po drugim wyrzuceniu! (Z punktu widzenia czasu, przy jednostajnej pracy silnika, będzie to nieco krócej trwało, ale to niczemu nie przeszkadza. Nasze porcyjki istnieją tylko w naszym umyśle.). Spowoduje to zmniejszenie masy znów o czynnik $\frac{n}{n+1}$ do wartości $M\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ i dołożenie nowej prędkości w/n. Jasne co będzie po k krokach. Masa będzie:

$$m = M\left(\frac{n}{n+1}\right)^k, \quad \text{a prędkość: } v = k\frac{w}{n}$$

Z pierwszego równania wyliczamy M/m, z drugiego k, które wstawiamy do pierwszego otrzymując:

$$\frac{M}{m} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{v/w}$$

Skorzystaliśmy z możliwości zamiany podnoszenia do potęgi równej iloczynowi, na kolejne potęgowanie — najpierw do potęgi n, potem do potęgi v/w.

[4] W krótkim czasie emisji tej porcyjki rakieta uzyskała niewielką prędkość względem układu w którym spoczywała na początku emisji tej porcyjki. Prędkość spalin stała względem rakiety odrobinę się zmieniała względem układu inercjalnego i jej średnia jest nieco mniejsza od w. Błąd ten można całkiem wyeliminować biorąc na końcu, po wykonaniu obliczeń, porcyjkę dowolnie małą. Tak też i my postąpimy.

Stosunek M/m wyraża ile razy rakieta z paliwem jest na starcie[5] masywniejsza od ostatecznie rozpędzonego pojazdu (pocisku, satelity, itp). Duża wartość tego stosunku jest bolesną koniecznością, niezwykle kosztowną. Znakomicie na korzyść działa wybór paliwa o jak największym w. Konstruktorzy rakiet doceniają korzyść ze znajomości uzyskanego związku. Nosi on nazwę wzoru Ciołkowskiego.

We wzorze pojawiła się liczba $(1 + 1/n)^n$. Wprowadzenie liczby n było matematycznym wybiegiem. Przy ciągłej emisji gazów należy podstawić „nieskończenie" duże n. Można sprawdzić na kalkulatorze, że wartość powyższej kombinacji nieco rośnie gdy podstawiamy coraz większe n, ale potem wzrost jest coraz wolniejszy, wolniejszy i wartości 2,7182... przekroczyć się nie da, choć można do niej się dowolnie przybliżyć. Liczba ta, jak mówią matematycy: *granica* wyrażenia $(1+1/n)^n$ dla n dążącego do nieskończoności, oznaczana jest literą e. Jest to druga najważniejsza — obok π — liczba matematyki. Faktycznie wzór Ciołkowskiego ma więc postać:

$$\frac{M}{m} = e^{v/w}$$

Liczba e jest „naturalną" podstawą logarytmów. Logarytm przy podstawie e oznaczany ln zwie się właśnie *logarytmem naturalnym*. Logarytmując wzór Ciołkowskiego mamy inną jego postać:

$$v = w \ln \frac{M}{m}$$

Gdyby była potrzebna znajomość prędkości w zależności od czasu, przy jednostajnym wypływie masy w tempie s kilogramów na sekundę, mielibyśmy: $m = M - st$, i w rezultacie:

$$v(t) = w \ln \frac{M}{M - st}$$

[5]Nasz przykład dotyczy zmian prędkości rakiety swobodnej, już w przestrzeni kosmicznej. Realistyczny start z Ziemi wymagałby uwzględnienia grawitacji i oporu atmosfery. To się też daje zrobić, ale to zadanie dla inżynierów z NASA, nie dla nas na lekcji.

4.4 Opory w ośrodku

Oddziaływanie z ośrodkiem ruchomego ciała o prostym kształcie, powiedzmy walca o polu podstawy S lecącego wzdłuż osi, można z łatwością wyznaczyć, w skrajnie uproszczonym przypadku gdy ośrodek jest rzadki, a prędkość cząsteczek ośrodka (w układzie w którym formułujemy pytanie) jest zerowa (w praktyce dużo niższa niż prędkość ciała). Założenia te dość dobrze spełnione są w przestrzeni okółziemskiej gdzie krążące satelity zaczynają powoli tracić swą energię i powoli zaczynają zmierzać do niszczącego wtargnięcia w gęstsze warstwy atmosfery.

Płaszczyzna czołowa ciała uderzając w nieruchomą cząstkę ośrodka nadaje jej pęd $2mV$. (W układzie odniesienia ciała cząstka pada na ciało z prędkością $-V$ i odbija się z zachowaniem energii kinetycznej, a więc do prędkości V. W układzie spoczywającego ośrodka jest to prędkość $2V$. Uwzględnienie odskoku cylindra w tym jednym zderzeniu jest niepotrzebne, ze względu na dysproporcję mas.) W ciągu sekundy walec przebywa drogę liczbowo równą V i „zamiata” cząstki z objętości SV. Zkładając gęstość ośrodka $\rho_{\text{ośr}}$ znajdujemy wielkość rozpędzonej do prędkości $2V$ masy równą: $\rho_{\text{ośr}}SV$. Mnożąc tę wielkość przez $2V$ dostajemy pęd przekazany w ciągu jednej sekundy (a więc siłę):

$$F = 2\rho_{\text{ośr}}SV^2$$

To jest bardzo elegancki wynik słuszny przy poczynionych założeniach dla dowolnej prędkości, można go nawet użyć do wyznaczenia ruchu rozpoczętego z pewną prędkością początkową V_0[6]. Jedyny szkopuł to to, iż poczynione założenia są bardzo rzadko spełnione.

W ważnym i interesującym przypadku ruchu w ośrodku gazowym, niezbyt rozrzedzonym mamy podobne trudności jak w pierwszym przykładzie tłoka. Wyznaczaniem zależności oporu dla różnych kształtów (skrzydeł samolotów, karoserii samochodowych, kształ-

[6]Podamy tu bez dowodu wynik na prędkość rozpatrywanego ciała po czasie t: $V(t) = V_0/(1 + t\frac{2V_0}{L}\rho_{\text{ośr}}/\rho_{\text{ciała}})$. Litera L oznacza długość cylindra. Cierpliwy Czytelnik powinien spróbować policzyć chwilową wartość przyspieszenia w tak niejednostajnie zmiennym ruchu i przekonać się, że pokrywa się ono z tą wartością jaka wynika z wielkości działającej w danej chwili siły F wyliczonej powyżej.

tów kadłubów statków itp), różnych ośrodków i różnych prędkości zajmują się całe instytuty badawcze. Wyniki — często czysto empiryczne — gromadzi się w formie tabel i wykresów wykorzystywanych gdy zachodzi potrzeba zaprojektowania nowego modelu pojazdu. Znów, o jakiejś uniwersalnej formule tak pięknej jak GMm/r^2 nikt nawet nie marzy.

4.5 Tarcie

Tarcie suchych powierzchni ciał stałych o siebie leży na pograniczu oporów ruchu i sił sprężystych. Leżący na podłożu klocek nie spada w dół bo, trochę podobnie jak tłok nad gazem, przekazuje stale pęd do podłoża równy $m\vec{g}$ w ciągu jednej sekundy[7]. Taki stan oddziaływania nazywamy *naciskiem*, a wartość siły nacisku oznaczamy N. Jeśli do klocka przyłożone są jeszcze siły od ciał innych niż podłoże, pęd płynący do klocka od nich i od Ziemi jest inny niż $m\vec{g}$ i (o ile jest bezruch) pęd ten w całości jest przekazywany do podłoża. Ten nowy strumień pędu to też nacisk. Gdy siadamy na saneczki *ich* nacisk na podłoże wzrasta!

Gdy do leżącego na podłożu klocka przyłożymy niewielką siłę poziomą, klocek ani drgnie. To są znane powszechnie fakty. (Oprzyj się Czytelniku o szafę, a wytworzysz taką sytuację.) Na styku ciała i podłoża wytworzyło się niezauważalnie drobne odkształcenie obu stykających się ciał powodujące przepływ pędu stycznego do płaszczyzny styku, równoważący pęd doprowadzany przez przyłożoną siłę poziomą. W miarę powiększania przyłożonej siły wzmagają się wspomniane drobne odkształcenia, ale równowaga jest nadal utrzymywana. Siła oddziaływania między klockiem a podłożem, o wartości przyłożonej siły zewnętrznej, nazywa się tarciem statycznym. Siła ta równa jest wartości siły poziomej przyłożonej z zewnątrz, niezależnie od cech ciała i trących się powierzchni! Istnieje wszakże graniczna wartość przyłożonej siły, powyżej której tarcie statyczne nie jest w stanie skompensować działania zewnętrznego. Ta maksymalna wartość zależy dla danego rodzaju powierzchni jedynie od nacisku i jest doń (w przybliżeniu) wprost proporcjonana.

[7] Inny sposób wysłowienia tej myśli to powiedzieć, że to podłoże przekazuje klockowi pęd $-m\vec{g}$.

Współczynnik proporcjonalności nazywa się współczynnikiem tarcia statycznego, oznaczanym często f_s:

$$\text{Maksymalne tarcie} = f_s N$$

Wartości f dla różnych rodzajów trących się powierzchni wyznaczane są czysto empirycznie. Próby wyznaczenia teoretycznego w oparciu o znajomość budowy wewnętrznej trących się ciał nie odniosły żadnego sukcesu. Inna sprawa, że współczynnik tarcia f_s jest niezwykle czuły na niewielkie różnice stanu powierzchni trących się ciał, na niewielkie obecności domieszek, ślady zanieczyszczeń, stopień utlenienia, wilgotność itp. Datego dane tablicowe typu: „węgiel po żelazie: 0,5 – 0,75" mają tylko wartość orientacyjną.

Gdy tarcie maksymalne statyczne zostanie przekroczone, zaczyna się ruch. W trakcie tego ruchu między trącymi się powierzchniami występuje siła styczna przeciwnie skierowana do prędkości, o wartości proporcjonalnej do nacisku, z współczynnikiem proporcjonalności zwanym współczynnikiem tarcia kinetycznego f_k. Współczynnik ten jest z reguły mniejszy od f_s. Chcąc, by po ruszeniu ciała, dalszy ruch był jednostajny, należy nieco zmniejszyć poziomą siłę zewnętrzną — do wartości $f_k N$.

Znajomość współczynnika tarcia pozwala, według metody Newtona, przewidywać ruch. Rozważmy klasyczny przykład pojazdu o prędkości początkowej v_0, hamującego najefektywniej jak tylko można, jeśli współczynnik tarcia materiału opon o jezdnię wynosi f[8].

Przy jeździe po płaskim, nacisk pojazdu równy jest mg, siła tarcia przy hamowaniu na pograniczu poślizgu wynosi fmg. Po podzieleniu przez masę m dostajemy przyspieszenie fg. Jest ono oczywiście przeciwne do prędkości. Korzystając z wzoru na drogę przebytą w ruchu jednostajnie zmiennym z prędkością początkową

[8] Trochę nieoczekiwanie współczynnikiem istotnym jest tu współczynnik tarcia statycznego. Trące i **ślizgające się** powierzchnie występują gdzie indziej — w hamulcach. Wytworzone tam skutki przeniesione na koło powodują oddziaływania opony z jezdnią, które nie powinny przekroczyć maksymalnego tarcia statycznego. Takie przekroczenie (poślizg) powodowałoby przejście do tarcia kinetycznego opon o jezdnię, a tym samym zmniejszenie siły działającej na samochód, nie mówiąc już o pojawiającej się niestbilności ruchu.

możemy podać zależność położenia (mierzonego od punktu rozpoczęcia hamowania) od czasu:

$$s = v_0 t - fgt^2/2$$

Powyższy wzór mógłby być użyteczny do ustalenia z jaką prędkością pojazd uderzy w przeszkodę, jeśli hamowanie rozpoczęto zbyt późno, ale w określonej odległości. Mógłby też być użyty do zadania odwrotnego. Np. w procesie karnym o spowodowanie wypadku trzeba ustalić prędkość pojazdu w momencie rozpoczęcia hamowania (czy nie była za wysoka). Znając drogę przebytą i prękość w chwili kolizji (ocenioną po jej skutkach) można dzięki prawom ruchu odtworzyć nawet przeszłość.

Gdy interesuje nas droga hamowania do zatrzymania pojazdu (bez kolizji) najprościej obliczyć ją następująco: Czas ruchu: $t = v_0/(fg)$. Prędkość średnia $(v_0 + 0)/2 = v_0/2$. Droga: $v_0/2 \times v_0/(fg) = v_0^2/(2fg)$. Współczynnik tarcia dobrych opon przekracza 0,5 ale przeciętnie przyjmijmy, z pewnym marginesem bezpieczeństwa, tę akurat wartość. Drogę w metrach dostajemy w tym przypadku dzieląc kwadrat prędkości w metrach na sekundę przez 10. Np. dla prędkości $3 \cdot 36\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{godz}} = 108\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{godz}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ droga hamowania wynosi $30^2/10 = 90$ metrów. To dosyć dużo. Trzeba o tym pamiętać jeżdżąc samochodem.

4.6 Sprężystość

4.6.1 Natura sprężystości

Sprężystość gazu wytłumaczyliśmy (przynajmniej co do głównej idei) wykorzystując pojęcia mechaniki Newtona do opisu zbiorowości cząstek jaką jest gaz. Sprężystość ta jest całkowicie jednostronna — gaz stale tłok odpycha. Gaz nie ma „ulubionej” przez siebie objętości, po przekroczeniu której zacząłby tłok przyciągać.

Tylko i wyłącznie dzięki siłom elektromagnetycznym między składnikami atomu, ale traktowanymi KWANTOWO, nie po niutonowsku, atomy efektywnie przyciągają się dla pewnych odległości, a zanadto stłoczone — odpychają się [9]. W przeciwieństwie do gazów, ciała stałe, mają taką ulubioną odległość między atomami, i taką przyjmują w swobodnym krysztale.

Jeśli bryłę ciała stałego — np. prostopadłościan — zaczniemy ściskać, pojawią się siły przeciwstawiające się temu. Długość bryły w kierunku ściskania zmniejszy się i z bryły zacznie płynąć przez obie powierzchnie pęd skierowany na zewnątrz. Przypomina to sytuację z gazem, ale tylko co do kierunków odkształcenia i kierunku przepływu pędu, gdyż zależność pojawiających się sił od stopnia zgniecenia jest teraz dużo gwałtowniejsza.

Jeśli dwa przeciwległe boki jakoś ułapimy i rozciągniemy, pojawi się strumień pędu (siła) przeciwny. Jak już była okazja wspominać, dowolny gładki wykres siły jaki może się w konkretnym przypadku pojawić, dla DOSTATECZNIE niewielkiego zakresu zawsze można zastąpić odcinkiem lini prostej i powiedzieć, że siła jest proporcjonalna do odkształcenia. To słynne prawo Hooke'a. Ma ono w znacznej mierze charakter tautologii [10]. Gdy siła nie jest proporcjonalna do wychylenia (a nigdy nie jest w ścisłym tego słowa znaczeniu!), obrońca prawa Hooke'a nie pogodzi się z zarzutem, tylko powie: badasz za duże odkształcenia, jak się ograniczysz do istotnie mniejszych, zacznie ci proporcjonalność się zgadzać. Dla deformacji zwartej bryły, takiej jak sześcian, czy prostopadłościan o niezbyt różniących się bokach, zakres deformacji sprężystych nie przekracza często jednego procenta.

Jest wszakże wielce szczęśliwym zbiegiem okoliczności, że realny zakres dobrej stosowalności reguły proporcjonalności jest, mimo wszystko, bogaty. Budując rozmaite mosty i inne konstrukcje o niezbędnej wytrzymałości, napotykamy tam odkształcenia przeważnie nie przekraczające zakresu stosowalności prawa Hooke'a (chyba że

[9] Usiłując zastosować prawo Newtona do zbioru jąder i elektronów nigdy się tego wyniku nie otrzyma. Ba, przede wszystkim nigdy się nie otrzyma wyniku, że atomy mają być jednakowe. Najprostszy atom — atom wodoru — złożony jest z protonu i elektronu przyciągających się według wzoru matematycznego takiego jak planeta i Słońce. W mechanice Newtona wszystkie wartości promieni orbit są dozwolone. Gdyby wielkość orbity to była wielkość atomu, atomy wodoru powinny być i duże, i małe — w kompletnej sprzeczności z obserwacjami.

[10] masło maślane

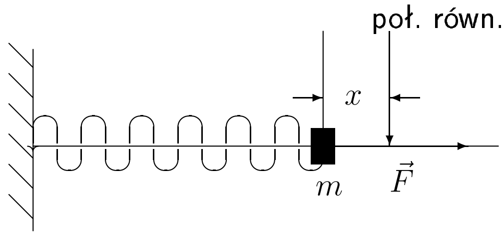
nastąpi trzęsienie Ziemi i konstrukcja się zawali!). Dzięki temu możemy mieć pełną teoretyczną kontrolę — już na etapie projektowania — funkcjonowania takiej konstrukcji. Można przewidywać reakcję na wibracje, wiejący wiatr itp. Taka przewidywalność zachowania znacznie obniża koszty i zmniejsza ryzyko katastrofy budowlanej. Same współczynniki proporcjonalności między siłą a odkształceniem wyznacza się doświadzalnie dla rozmaitych substancji i umieszcza w tablicach, by nie musiał każdy zainteresowany prowadzić pomiarów na nowo.

Z samej swej natury sprężystość dotyczy bryły rozciągłej. Bryła ta ulega deformacji — jej różne miejsca inaczej się przesuwają. Nie jest to za bardzo podobne do rozważanych przez Newtona ruchów jednego, czy paru punktów materialnych. Nawet jeśli u Newtona są realne ciała (jabłko, Księżyc, na przykład), a nie abstrakcyjne punkty, to chodzi o ich ruch jako całości, w zasadzie o ruch środka masy. Zagadnienie wyznaczenia zależnej (a także i niezależnej) od czasu deformacji bryły, było rozwiązane przez następców Newtona przy wyłącznym stosowaniu jego praw. Idea polega na rozbiciu (w myśli) bryły na nieskończenie wiele punktowych obszarów i stosowanie do nich równań Newtona z użyciem sił sprężystych, oczywiście proporcjonalnych do odkształceń jakie mają miejsce w bezpośrednim otoczeniu tego punktu. Matematyka tego podejścia jest dość złożona i niewiele na ten temat można zaprezentować w szkole.

Istnieją szczególne sytuacje, gdy rozciągłość i masywność ciała sprężystego schodzi na drugi plan. Przez ukształtowanie materiału w ten sposób, że stanem jego równowagi jest długa cienka spirala, uzyskuje się, przy niewielkich procentowych deformacjach lokalnych, duże zmiany długości całkowitej. Jeśli sprężyną taką połączyć dwa masywne ciała, to przekazuje ona pęd od jednego do drugiego, sama (przez swą lekkość) nie mając znaczącego pędu. Szybkość przekazu pędu zależy od długości sprężyny, czyli od odległości ciał. Pojawia się sytuacja gdy, jak w astronomii, czy spadku swobodnym, możemy użyć równania $a = F/m$ mając znów użyteczny wzór na siłę, tym razem sprężystą. Zderzaki wagonów kolejowych, balansowe zegarki na rękę (wychodzące coraz bardziej z użycia), ruchome części przyrządów pomiarowych elektrycznych, rozmaite wagi, resory samochodowe, czy nawet proca z gumy do majtek, to tylko niektóre przykłady występowania i wykorzystania sił sprężystych rozumianych jako siły działające na całe, pojedyncze ciała. (Struna w instrumencie muzycznym, czy membrana w perkusji, to ta inna ogólniejsza, trudniejsza domena użycia sił sprężystych „rozmazanych" w ciągły sposób na linii czy na powierzchni.)

4.6.2 Oscylator

Rozpatrzmy zachowanie układu przedstawionego na rysunku obok. Jedno z ciał oddziałujących za pośrednictwem sprężyny to ściana, drugie to bryła o masie m. Sciana jest nieruchoma, interesuje nas ruch masy m. Mierząc współrzędną ciała od położenia równowagi sprężyny, zapisujemy siłę działającą na ciało jako: $F = -kx$, gdzie współczynnik k dla konkretnej sprężyny powinien być zmierzony.

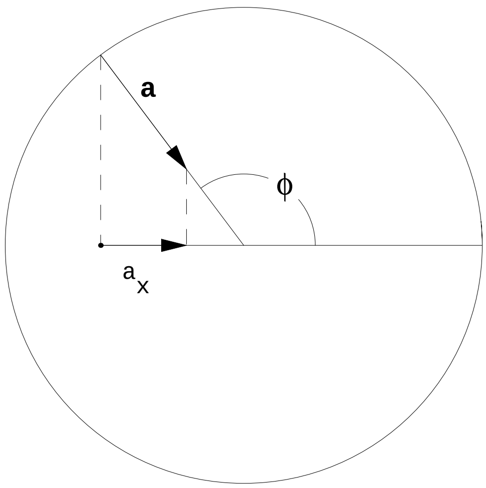


Prawo Newtona jest:

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Pojawia się zadanie już czysto matematyczne: jakie ruchy spełniają powyższy warunek, w szczególności jaki jest ten JEDEN ruch zgodny z powyższym równaniem, który w chwili początkowej zaczyna się w położeniu x_0 z początkową wartością prędkości v_0. To jest najważniejsze zadanie dynamiki, możliwe do rozwiązania gdy dana jest formuła siły.

Jak zapisany jest stały współczynnik, i jaki jest jego sens fizyczny, dla matematyki jest obojętne. Równanie $\vec{a} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\vec{r}$ już mieliśmy, tyle że w postaci wektorowej, dla jednostajnego ruchu po okręgu:



Rysunek 4.1: przyspieszenie w ruchu po okręgu

Równanie wektorowe oznacza równość dla obu współrzędnych z osobna, więc współrzędna x-owa punktu poruszającego się po okręgu, też spełnia takie same równanie:

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

Równanie powyższe jest prawdziwe niezależnie od wartości promienia okręgu, i niezależnie od miejsca na okręgu w którym zaczął się ruch w chwili $t = 0$. Mając swobodę wyboru tych dwóch wielkości, możemy spełnić dwa warunki na położenie i prędkość początkową.

Z punktu widzenia naszego klocka na sprężynie okrąg powyższy jest tylko chwytem matematycznym, ale chwytem bardzo użytecznym.

Ruch ciała pod wpływem siły sprężystej jest identyczny z rzutem na średnicę ruchu jednostajnego po okręgu

Ruch taki nazywa się *ruchem harmonicznym*. Promień pomocniczego okręgu nazywa się *amplitudą* ruchu harmonicznego — będziemy używali oznaczenia A. Jest oczywiste, że maksymalne wychylenia od położenia równowagi (w obie strony) są identyczne z tą amplitudą. Fazą ruchu (lepiej mówić fazą początkową) jest kąt ϕ_0 zaznaczony na rysunku dla chwili zero. Wartość kąta na obwodzie w chwili rozpatrywanej, czasami też nazywa się fazą. Tak rozumiana faza rośnie równomiernie w miarę upływu czasu. Jeśli kąt mierzyć w mierze łukowej, ta rosnąca faza zapisuje się jako:

$$\phi = \phi_0 + 2\pi\frac{t}{T} = \phi_0 + \omega t$$

Wielkość ω jest ilorazem przyrostu kąta i czasu na to potrzebnego — zwie się w związku z tym *prędkością kątową*.

Prędkość w ruchu harmonicznym jest współrzędną prędkości w ruchu po okręgu. Jej maksymalna wartość wynosi: $v_{\text{max}} = \frac{2\pi}{T}r = \omega A$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych mamy:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$$

Korzystając z wzorów trygonometrycznych na sinus i cosinus sumy, możemy powyższym wynikom nadać inną postać, do niektórych celów wygodniejszą.

$$x = A\cos\omega t\cos\phi_0 - A\sin\omega t\sin\phi_0$$

$$v = -A\omega\sin\omega t\cos\phi_0 - A\omega\cos\omega t\sin\phi_0$$

To w tej postaci wygodnie jest spełnić warunki początkowe. Dla $t = 0$ w każdym z wyrażeń zostaje tylko człon z $\cos\omega t$ równy w dodatku w tej chwili 1. Mamy:

$$x_0 = A\cos\phi_0$$

$$v_0 = -A\omega\sin\phi_0$$

Wstawiając do rozwiazania ogólnego zamiast $A\cos\phi_0$ i $A\sin\phi_0$ odpowiednio x_0 i v_0/ω dostajemy ostatecznie:

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

Zgodnie z zasadą determinizmu ruch został wyznaczony. Wiedząc co podstawić w miejsce położenia i prędkości początkowej możemy przewidzieć co ciało będzie robić w dowolnej chwili w przyszłości.

Ruch harmoniczny jest absolutnie najważniejszym w przyrodzie *ruchem okresowym*. Dla naszego ciała na sprężynie przyrównanie ogólnego współczynnika proporcjonalności między wychyleniem a przyspieszeniem: $4\pi^2/T^2 = \omega^2$ do wartości tego współczynnika występującej w równaniu dynamiki: k/m pozwala napisać:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} = \omega^2$$

a to już wygodnie przedstawić w postaci wyrażającej okres drgań przez parametry układu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Zależność od czasu opisana funkcją trygonometryczną cosinus (lub sinus) jest charakterystyczna dla wielu zjawisk w przyrodzie i technice. Będziecie mieli okazję nieraz się o tym przekonać.

Zbadajmy jeszcze zmiany energii potencjalnej i kinetycznej w ruchu harmonicznym. Postać energii potencjalnej siły sprężystej wyznaczyliśmy wcześniej: $E_{\rm pot} = kx^2/2$. Podstawiając współrzędną x wyrażoną przez aplitudę, czas i fazę początkową do tego wyrażenia, a prędkość do $E_{\rm kin} = mv^2/2$ dostajemy:

$$E_{\rm pot} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

$$E_{\rm kin} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \phi_0)$$

Ponieważ $m\omega^2 = k$, współczynniki przy obu energiach są równe sobie. Każda z nich waha się w tych samych granicach: od zera do

$kA^2/2$. Znana własność „jedynki trygonometrycznej”, odzwierciedlająca twierdzenie Pitagorasa, potwierdza tezę o stałości energii w miarę upływu czasu. Energia przelewa sie tu od jednej formy do drugiej. Im dalej od środka, tym cząstka wolniejsza, a sprężyna bardziej napięta.

4.7 Spoistość

W wielu sytuacjach odkształcenia sprężyste ciał są znikomo małe, tak małe że ich praktycznie nie zauważamy, nie mają dla nas innego znaczenia poza tym, że „produkują” siły sprężyste. Siły nie są małe, nie są nieistotne, a odkształcenia są. Skrajnym przykładem niech będzie mrówka co weszła na most. Most się ugiął i wytwarza siłę sprężystą w 100 procentach równoważącą siłę grawitacji z jaką Ziemia ciągnie mrówkę w dół. Mrówka nie spada, siła sprężysta jest kluczowa dla jej ruchu. Ale czy poza tym, wychylenie mostu warto dodawać do współrzędnej mrówki względem mostu i twierdzić że mrówka nie idzie po pierwotnie prostej linii mostu? Oczywiście nie warto zawracać sobie głowy odkształceniem mostu pod ciężarem mrówki. Nie interesuje nas wartość współczynnika sprężystości w tym wypadku. Jest on formalnie nieskończenie wielki.

Gdy można zrobić takie przybliżenie, jest to bardzo wygodna sytuacja, pozwalająca rozwiązać wiele zagadnień bez konieczności uwzględniania w jakikolwiek sposób wewnętrznych własności materii. To jest krąg zagadnień w którym mechanika klasyczna poczyniła wielkie postępy, już po Newtonie, w czasach późniejszych. Wygodnie jest te siły nazwać siłami spoistości.

Zwracaliśmy uwagę w jednym z poprzednich rozdziałów, że metodę równań Newtona można stosować przy siłach sprężystych gdy daje się wyróżnić masywne ciała i lekkie sprężynki. Gdy ośrodek sprężysty trzęsie się jak galareta, trzeba rozwinąć nową, trudniejszą matematykę. Z siłami spoistości jest znacznie prościej. Rozciągłe ciało sprężyste, którego deformacje są pomijalnie małe **może się tylko co najwyżej dodatkowo obracać**. Nazywamy takie ciała bryłami sztywnymi. I chociaż ogólna teoria ruchu bryły sztywnej, rozwinięta przez Eulera jako zastosowanie metody Newtona, też jest dość trudna, przypadki szczególne ruchu wokół ustalonej osi są łatwe do opisu, a bardzo ważne w praktyce i popularne w fizyce szkolnej.

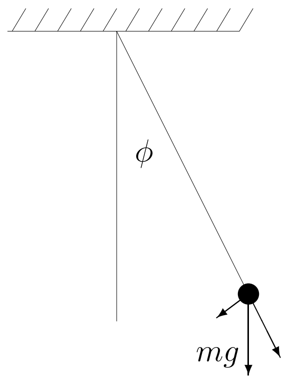
Gdy zaniedbywalnie lekkie ciało sprężyste łączące dwa punkty przestaje się rozciągać, mówimy o takim przypadku jako o występowaniu więzów. Rolę takich więzów pełnią przeważnie pręty, chociaż może to być i nierozciągliwa linka, gdy zewnętrzne siły w układzie próbują tylko ją rozciągać. Wtedy nie ma różnicy między prętem, a wiotką linką.

Pręty czy linki są źródłem sił na ciała układu, ale nie mogą te siły być wyrażone, jak dotychczas, jako funkcje odkształcenia, bo to odkształcenie jest tak małe, że nic o nim nie wiemy. W praktyce często postępujemy tak, że przyjmujemy na te siły więzów pewne oznaczenia, tak jakbyśmy je znali, wstawiamy do równań ruchu obok innych znanych sił i dopisujemy jeszcze równania geometryczne wynikające z istnienia tych więzów. Liczba równań wychodzi w końcu taka jak liczba niewiadomych. W innych wypadkach można skorzystać z zasady zachowania energii. Wystarczy przy tym uwzględniać energie potencjalne sił zewnętrznych, bo skończone siły więzów nie wykonują pracy na nieskończenie małych przesunięciach. Obie te metody zilustrujemy przykładami. Więcej przykładów poznacie rozwiązując zadania.

4.7.1 Wahadło

Ważnym i ciekawym przykładem ruchu z udziałem siły spoistości więzów i siły grawitacji jest ruch wahadła. Gdy wahające się ciało i (albo) ciało podtrzymujące go w stałej odległości od punktu zawieszenia mają rozmiary których pominąć nie można — mówimy o *wahadle fizycznym*. W wyidelizowanym przypadku ciała punktowego zawieszonego na nieważkim pręcie, czy na nieważkiej lince — mówimy o *wahadle matematycznym*. Zajmiemy się tu tym drugim.

Jako wielkość charakteryzującą chwilowe położenie można wybrać zaznaczony na rysunku kąt ϕ (z minusem dla położeń po przeciwnej stronie), albo współrzędną x mierzoną poziomo, albo odległość od położenia najniższego mierzoną **wzdłuż okręgu**, też z odpowiednim znakiem. Wybierzemy tę ostatnią możliwość.



Zanalizujmy strumienie pędu dopływające do ciała. Grawitacja dostarcza strumień $m\vec{g}$, który dla wygody możemy rozłożyć na strumień styczny do okręgu i strumień wzdłuż linki. Ten drugi strumień, wraz ze strumieniem dostarczanym przez linkę, odpowiedzialne są w sumie za przyspieszenie dośrodkowe punktu. Nie musimy wypisywać odpowiedniego równania, jeśli nie chcemy znać wartości napięcia linki. Za to ten drugi strumień, o wartości $-mg\sin\frac{s}{l}$, nadaje styczne przyspieszenie w ruchu opisanym wielkością s, tak jakby wszystko odbywało się wzdłuż prostej. Skracając masę dostajemy:

$$a = -g\sin\frac{s}{l}$$

Dla dużych wychyleń wahadła jego ruch można znaleźć numerycznie, krok po kroku, tak jak to opisywaliśmy przedstawiając istotę determinizmu zawartego w metodzie Newtona. Dla małych wychyleń, gdy długość łuku i cięciwa stają się nieodróżnialne praktycznie w swych wartościach, możemy zastąpić $\sin(s/l) \simeq s/l$. Prowadzi to do uproszczonego związku:

$$a = -\frac{g}{l}s$$

Jest to warunek ruchu harmonicznego. Zatem wahania wahadła matematycznego (przy niewielkich amplitudach) są opisane zależnością:

$$s = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \phi_0\right)$$

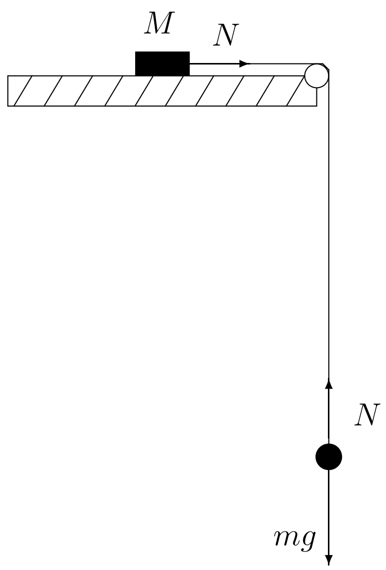
Amplituda i faza początkowa zależą od tego kiedy i jak wprawiliśmy wahadło w ruch. Najistotniejsza dla wahadła jest periodyczność jego ruchu. Jak można odczytać z porównania współczynnika proporcjonalości między przyspieszeniem a wychyleniem dla ogólnego ruchu harmonicznego i dla naszego wahadła: $4\pi^2/T^2 = g/l$ okres ten wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okresowość ruchu wahadła przez długie lata była podstawą pomiaru czasu. Do dzisiaj jeszcze spotyka się zegary wahadłowe. Związek okresu wahadła z (łatwo dostępną zmierzeniu) długością i przyspieszeniem ziemskim g pozwala na dokładne wyznaczenie i tego ostatniego.

4.7.2 Klocki i linki

Na stole leży klocek o masie M, który może poruszać się praktycznie bez tarcia. Klocek połączony jest nieważką nierozciągliwą nitką z innym klockiem o masie m. Nitka przewieszona jest przez krawędź stołu, jej część z ciężarkiem m zwisa ponowo.



W zadaniu powyższym, obok nitki, w charakterze więzów występuje również stół. Ale z nim sprawa jest prosta. Przejmuje on w całości pęd pionowy jaki Ziemia nadaje klockowi M i nie pozwala mu spadać. By tę funkcję wypełnić, stół musiał po położeniu na nim klocka nieco się ugiąć — to jest to niewidoczne ugięcie charakterystyczne dla więzów. Ważniejsza jest nitka. Oddziałuje ona jakoś na ciężarek m nie pozwalając mu spadać z pełnym przyspieszeniem g. Nazwijmy to napięcie nitki literą N. Równanie Newtona dla wiszącego ciężarka jest:

$$ma = mg - N$$

Gdy popatrzymy na dowolny fragment nitki (również na zagięciu) napięcia na dwóch końcach muszą być takie same. Jakakolwiek różnica powodowałaby nieskończone przyspieszenie (bo nitka jest nieskończenie lekka), a to nonsens. Zatem i na drugim końcu napięcie nitki jest N i ta siła rozpędza klocek na stole:

$$Ma' = N$$

Przyspieszenie ciała na stole oznaczyliśmy a'. Mamy dwa równanie Newtona dla dwóch ciał, a niewiadome są trzy: a, a', N. Ale właśnie więzy, nierozciągliwość nitki oznacza, że przesunięcia obu ciał w tym samym czasie są równe. Równe muszą być i szybkości i wartości przyspieszeń. Mamy trzecie równanie:

$$a = a'$$

Teraz już łatwo rozwiązać nasze równania:

$$a = a' = \frac{mg}{M+m}\ , \quad N = \frac{Mmg}{M+m}$$

Wynik na przyspieszenie wygląda tak, jakby siła mg rozpędzała masę $M+m$. Ale przecież obie masy poruszają się w różnych kierunkach; bez faktycznego rozwiązania, wynik nie byłby taki oczywisty.

Nie będzie stratą czasu rozwiązanie powyższego zadania jeszcze raz inną metodą, bo wprowadzi nas na prostym przykładzie w świat zastosowań energii. Prawo zachowania energii jest wyjątkowo przydatne w obecności sił spoistości, bo nie wiąże się z nimi odkształcenie, a więc i energia potencjalna. Dzięki temu równania wyrażające prawo zachowania energii pozostają na ogół proste i łatwe do użycia.

W przypadku klocków, które dzięki nitce muszą mieć jednakową wartość szybkości v, całkowita energia kinetyczna wynosi:

$$Mv^2/2 + mv^2/2 = (M+m)v^2/2,$$

energia potencjalna zaś (mierzona od poziomu stołu)

$$-mgy.$$

Znak minus bierze się stąd, że oś Y jest teraz skierowana do dołu.

Prawo zachowania energii mówi, że:

$$\frac{M+m}{2}v^2 - mgy = \mathrm{const}$$

Prawo takie można, gdy się już je ma, wykorzystać na różne sposoby. W szczególności można także do wyznaczenia przyspieszenia. W tym celu trzeba zapisać, że zmiana stałej wynosi ZERO. Przy jej obliczaniu skorzystamy z wykorzystywanej wielokrotnie dla małych przyrostów reguły: $\Delta v^2 = 2v\Delta v$. Tak więc:

$$0 = (M+m)v\Delta v - mg\Delta y.$$

Przenosimy człony na różne strony, podstawiamy w miejsce prędkości v iloraz $\Delta y/\Delta t$, skracamy przez Δy i po zastąpieniu $\Delta v/\Delta t$ symbolem przyspieszenia a dostajemy:

$$(M+m)a = mg$$

Gdybyśmy odczuciu, że siła mg rozpędza masę $M+m$, chcieli nadać sens poprzez zmianę pędów, wystąpiłby wspomniany „zgrzyt" różnych kierunków obu ciał. Poprawne rozumowanie musiało „przejść" przez siłę napięcia nitki. Równań było aż trzy, a teraz tylko jedno. (Prawda że w tym zadaniu te trzy równania były bardzo proste, ale troszczymy się z wyprzedzeniem o sytuacje gdy przewaga metody „energetycznej" nad siłową będzie zgoła miażdżąca). Zaletą energii jest to, że jest bezkierunkowa i łatwo daje się dodawać.

Rozdział 5

Bryła sztywna. Momenty

5.1 Wstęp

We wszystkich dotychczasowych rozważaniach, nawet jeśli opisywane obiekty były i w miarę sztywne, i oczywiście, rozciągłe, interesował nas w zasadzie ruch ich środka masy. Z takiego punktu widzenia zajmowaliśmy się ruchami planet, ruchem jednoczesnym Ziemi i Księżyca, ruchem pociągów, wyrzuconych w górę piłek, czy ruchem fragmentów rozszczepionego jądra uranu. Ciała te były traktowane jak punkty materialne.

Gdy poszczególne części obiektu nie poruszają się z jednakową prędkością (pokrywającą się wtedy z prędkością środka masy i nazywaną po prostu prędkością danego ciała), sytuacja staje się jakościowo nowa.

Wprowadziliśmy w poprzednim rozdziale pojęcie sił sprężystych i ich szczególną odmianę — siły spoistości. Najbardziej charakterystyczną cechą zachowania się ciał rozciągłych pod wpływem sił sprężystych jest wystąpienie drgań. Fale sprężyste w ciałach stałych odpowiedzialne są m.in. za to, że słyszymy rozmowę za zamkniętymi drzwiami. O falach ogólnie, a o falach sprężystych w szczególności, uczyć się będziemy w następnych latach.

Siły spoistości to jest graniczy przypadek sił sprężystych o nieskończonym współczynniku k. Ciała sztywne to takie, w których siły spoistości nie pozwalają na zmianę wzajemnych odległości poszczególnych fragmentów ciała[1]. W takim wypadku ruch ciała rozciągłego, poza ruchem jego środka masy, polegać może już tylko na obrocie.

Oprócz samego realnego obrotu, ważne jest zbadanie i ustalenie warunków NIE występowania obrotu, mimo że sama konstrukcja układu, samo usytuowanie ciała, taką możliwość dopuszcza. Chcemy rozumieć co to znaczy, gdy nierównoramienna waga uspokoiła się i jest w równowadze. Chcemy rozumieć czemu pochylony działaniem wiatru jacht nie przewraca się, czy też co robić by się nie przewracał. Tak zwana statyka jest, w istocie, bardzo łatwa. Często od niej zaczyna się nauczanie fizyki. Reguły postępowania odkryto już w starożytności. My im tutaj poświęcimy już niewiele miejsca, ale celem naszym będzie pokazanie jak z JUŻ poznanych zasad mechaniki reguły te wynikają jako ich naturalna i oczywista konsekwencja.

Obrót bryły jest, z matematycznego punktu widzenia, dużo mniej złożony niż dowolna wibracja ciała stałego o skończonym współczynniku sprężystości, ale nadal dość trudny do opisania i wyznaczenia. W każdym razie, gdy chodzi o obrót najogólniejszy. Każdy z Was widział zapewne i bawił się tzw. bąkiem. Jego wirowanie wokół osi, która sama wiruje, a szczególnie gdy bąk nie jest już za szybki i zaczyna ruszać się coraz mniej regularnie, gdy już chwieje się i kołysze przyprawia o ból głowy i obawę o dobry stopień na egzaminie najlepszych studentów fizyki teoretycznej.

W przeciwieństwie do obrotu najogólniejszego, w trzech płaszczyznach równocześnie, obrót przy którym wszystkie punkty ciała mają prędkości w płaszczyznach równoległych, a więc prostopadłych do jednej ustalonej prostej, jest dużo, dużo prostszy do opisu. Jest on zarazem bardzo ważny z praktycznego punktu widzenia. Wiele elementów maszyn, pojazdów, itp. tak właśnie się kręci.

Zrozumienie własności takiego szczególnego obrotu jest wystarczające do sformułowania warunku równowagi bryły. W równowadze bryła (taka jak statek, wieża, dom) nie kręci się względem żadnej osi, można więc warunek równowagi wyrazić jako trzy odrębne

[1]Powtarzamy, już może za często, że jest to idealizacja, przybliżenie, uproszczenie. Fizyczne, realne odkształcenia jakieś są, ale tak małe, że ich nie widzimy, że nas one nie obchodzą. Błąd wynikający z tego pominięcia jest tak mały, że nas nie martwi.

warunki równowagi względem trzech prostopadłych możliwych do pomyślenia osi.

Ten szczególny, „łatwiejszy” obrót o którym dość zawile powiedzieliśmy jako o obrocie w którym prędkości punktów bryły leżą w płaszczyznach prostopadłych do ustalonej prostej, chciałoby się nazwać obrotem wokół nieruchomej (ustalonej) osi. I rzeczywiście często tak jest. Ale pomyślmy o kole samochodu jadącego po prostej. Wokół jakiej osi ono się obraca?

Mechanik powie zapewne, że wokół fizycznej osi, tej umieszczonej w piaście koła i popychanej w dyferencjale systemem kół zębatych przez inną oś idącą od skrzyni biegów. W układzie odniesienia samochodu jest to odpowiedź poprawna. Punkt umieszczony na osi jest autentycznie nieruchomy, a prędkości w różne strony mają różne części opony. Jednak dla obserwatora przy drodze, środek koła porusza się z prędkością samochodu, punkt opony, co akurat dotyka jezdni, jest nieruchomy (nie ślizga się), a punkt obwodu, co u samej góry, porusza się dwa razy szybciej. Chwilową osią obrotu jest oś przechodząca przez punkt styczności koła z jezdnią. Oś ta przesuwa się równolegle w przestrzeni. Również w stosunku do koła, ta chwilowa oś przechodzi przez coraz to inne jego punkty.

Problem toczenia rozwiążemy w dalszej kolejności. Narazie zacznijmy od zagadnień obrotu wokół osi nieruchomej w układzie odniesienia którym się posługujemy.

Do prawa ruchu obrotowego dojść można na dwa odrębne sposoby. Jeden polega na wyobrażeniu sobie wszystkich równań Newtona dla wszystkich punktów ciała z siłami zewnętrznymi, znanymi, i z siłami spoistości, dla których na początku wprowadzamy tylko oznaczenia. Nastepnie trzeba żonglować tak tymi równaniami, by uzyskać równanie użyteczne, z siłami spoistości wyeliminowanymi. Dla ruchu ogólnego, w trzech płaszczyznach równocześnie, taki sposób jest właściwie jedyny. Wymaga on rozbudowy aparatu matematycznego w zakresie rachunku wektorowego co nie jest bardzo trudne, ale coś trzeba zostawić do nauki na Politechnice, czy Uniwersytecie.

Drugi sposób, idealnie pasujący do uproszczonego ruchu obrotowego (wokół stałej osi, lub do toczenia równoległego), opiera się na zbadaniu bilansu energii.

Ponieważ względne przesunięcia części bryły nie występują, praca sił spoistości jest zero i **zmiana energii kinetycznej bryły równa się pracy wykonanej przez przyłożone siły zewnętrzne**. Po to by móc z powyższego bilansu zrobić użytek, musimy nauczyć się obliczać energię kinetyczną bryły wykonującej ruch obrotowy, oraz pracę wykonywaną przez przyłożone siły zewnętrzne, w zależności od kąta o jaki obróci się bryła.

5.2 Energia ruchu obrotowego

Badając obrót bryły, przy którym wszystkie jej punkty poruszają się po równoległych okręgach i z jednakowym okresem, wygodnie jest posługiwać się znanym nam już pojęciem prędkości kątowej ω. Przy ruchu jednostajnym obrotowym każdy z punktów bryły zatoczy pełny okrąg, czyli kąt 2π, w czasie T. Oznacza to, w tym wypadku: $\omega = 2\pi/T$. Ważny jest wzór wiążący zwykłą prędkość punktu, odległego od osi o r, z prędkością kątową:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Gdy ruch jest niejednostajny, prędkość kątowa staje się prędkością chwilową, mówiącą o stosunku kąta obrotu do (króciuteńkiego) odstępu czasu w jakim ten obrót się dokonał. Jest oczywiste, że powyższy związek prędkości kątowej z liniową jest słuszny i w tym wypadku. Tempo zmiany prędkości kątowej, z kolei, może — tak jak tempo zmian zwykłej prędkości — być większe, lub mniejsze, i określa się je przez podanie stosunku przyrostu prędkości kątowej do czasu jaki uplynął. Oznaczając to przyspieszenie kątowe symbolem ϵ mamy:

$$\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{a}{r}$$

gdzie a jest przyspieszeniem punktu, stycznym do okręgu. Gdyby np. ruch obrotowy był jednostajnie przyspieszony, z przyspieszeniem ϵ, mielibyśmy dla prędkości chwilowej ω i dla kąta obrotu ϕ:

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t, \quad \phi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\epsilon t^2$$

w zupełnej analogii do ruchu postępowego.

Przystępując do obliczania energii kinetycznej bryły, musimy odpowiedzieć sobie na pytanie, czy chcemy traktować ją jako skończony zbiór atomów, czy też skłonni jesteśmy pójść na pewne ustępstwa w stosunku do literalnej prawdy i uniknąć konieczności wykonania biliona bilionów dodawań na co nie starczyłoby wieku Wszechświata!

Dla bardzo wielu zagadnień mechaniki, aerodynamiki, czy hydrauliki, ziarnista budowa materii może być ignorowana. Pozwala to na wprowadzenie pojęcia gęstości, np. dla wody 1g/cm^3. Wyobrażenie o równomiernym, ciągłym rozłożeniu substancji bryły pozwoli wykonać ostateczne obliczenie sumy energii kinetycznych jej składników. Mając to „uciąglenie" w planie, można jednak na etapie pośrednim rozważań, traktować bryłę jako sumę skończonej (choć ogromnej) liczby punktów materialnych i wypisać jej energię jako sumę wkładów od tych składników.

Słowo „wypisać" należy traktować w pewien określony sposób. Np. sumę liczb od jednego do dziesięciu można „wypisać" literalnie jako:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

ale można też skorzystać z symboliki wymyślonej w matematyce i napisać:

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

Przy takiej symbolice zapisanie sumy miliona wyrazów nie zajmuje więcej czasu niż zapisanie sumy dziesięciu!

W ruchu obrotowym z prędkością kątowa ω energia pojedynczego punktu bryły o numerze i, którego masa jest m_i, a odległość od osi obrotu r_i wynosi:

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\omega r_i)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

gdzie przez N oznaczyliśmy liczbę wszystkich składników bryły. Widzimy (znów w analogii do ruchu punktu materialnego), że energia kinetyczna jest proporcjonalna do kwadratu prędkości kątowej z współczynnikiem $\frac{1}{2}$ i jeszcze pewną wielkością charakteryzującą ciało. Oznaczamy ją literą B i nazywamy *momentem bezwładności*:

$$B = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Ostatecznie:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{B\omega^2}{2}$$

Mimo pozornej komplikacji, biliona bilionów składników, wynik jaki uzyskaliśmy wprost wzrusza swą prostotą! W jakimś sensie, pozorna złożoność sytuacji nie jest jeszcze całkowicie usunięta, bo nie jest policzone B, ale to już tylko jedna konkretna (dla danej bryły i danej osi) wartość. Zależność energii bryły od prędkości kątowej została znaleziona. Momenty bezwładności rozmaitych brył o regularnych kształtach zostały policzone przed wiekami, a odpowiednie wartości (wyrażone przez masę i wymiary geometryczne) można znaleźć w stosownych tablicach.

Obliczanie momentów bezwładności rozmaitych brył wymaga opisania rozkładu masy wewnątrz tej bryły jako określonej ciągłej funkcji ignorującej istnienie atomów. Najczęściej bryła wykonana jest z jednolitego materiału i wtedy gęstość ta jest stała. Mówi się wtedy o momencie bezwładności np. jednorodnej kuli o masie M i promieniu R obracającej się wokół osi przechodzącej przez środek, podobnie walca względem osi symetrii. Można rozważać moment bezwładności pręta względem symetralnej, albo walca względem osi przechodzącej przez środek, ale prostopadłej do osi symetrii walca itp. Przy tych założeniach problem jest już czysto matematyczny. Można zapomnieć do czego służy moment bezwładności, i nadal go liczyć.

Przyglądając się formule definiującej B, łatwo ustalimy, że zastępując wszystkie odległości punktów wartością największą — oznaczmy ją R — uzyskamy wynik mówiacy od czego moment bezwładności jest mniejszy:

$$B < \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\mathrm{max}}^2 = r_{\mathrm{max}}^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = MR^2$$

gdzie sumę wszystkich mas, masę całkowitą oznaczyliśmy przez M. Dla cienkiego pierścienia, którego cała masa skupiona jest na obwodzie, w odległości R, mamy:

$$B = MR^2$$

ale dla wszystkich innych sytuacji moment będzie mniejszy:

$$B = \alpha MR^2$$

gdzie α pozostający ostatecznie do wyznaczenia liczbowy współczynnik mniejszy od jedności.

Naturalną drogą do obliczania momentów bezwładności jest tzw. rachunek całkowy, i można by ten problem odłożyć na później, ale — traktując to trochę jako ciekawostkę — dla kilku prostych brył pokażemy elementarny sposób obliczenia, omijający potrzebę całkowania.

Walec

Rozważmy walec o promieniu R, wysokości h i gęstości ρ. Wydzielmy wewnątrz niego mniejszy walec o promieniu r tworząc rurę. Moment bezwładności całego walca jest sumą momentu bezwładności mniejszego walca i rury, więc moment samej rury wynosi:

$$\alpha(\pi R^2 h\rho)R^2 - \alpha(\pi r^2 h\rho)r^2 = \alpha\pi h\rho(R^4 - r^4)$$

Korzystając z tożsamości: $R^4 - r^4 = (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$, przepisujemy moment bezwładności rury w postaci:

$$B_{\text{rury}} = \alpha(\pi(R^2 - r^2)h\rho)(R^2 + r^2)$$

Ale wielkość w nawiasie: $(\pi(R^2 - r^2)h\rho)$ to po prostu masa rury. Nazwijmy ją M_{rury}. Mamy więc:

$$B_{\text{rury}} = \alpha M_{\text{rury}}(R^2 + r^2)$$

Wprawdzie nadal nie wiemy ile wynosi α, ale za to wiemy ile wynosi moment bezwładności rury nieskończenie cienkiej dla której $r = R$! Po prostu $M_{\text{rury}}R^2$. Porównując te dwa wyniki:

$$M_{\text{rury}}R^2 = \alpha M_{\text{rury}}(R^2 + R^2)$$

widzimy natychmiast, że dla walca obracającego się wokół osi $\alpha = \frac{1}{2}$. Zatem:

$$B_{\text{walca}} = \frac{1}{2}MR^2$$

Pręt

Rozważmy pręt obracający się wokół osi przechodzącej przez jego koniec i prostopadłej do pręta. Niech długość pręta wynosi L, a masa jednostki jego długości λ. Z podobnych jak dla walca powodów, jego moment bezwładności można zapisać w postaci:

$$B = \alpha' ML^2$$

Pręt ten można (w myśli) podzielić na pręt przylegający do osi o długosci $l < L$ i odcinek o długości $L - l$. Moment bezwładności tego ostatniego wynosi:

$$\alpha' L\lambda L^2 - \alpha' l\lambda l^2 = \alpha'\lambda(L - l)(L^2 + Ll + l^2)$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru na różnicę trzecich potęg. Wprowadzając do powyższego wzoru masę odcinka:

$$M_{\text{odcinka}} = \lambda(L - l)$$

dostajemy:

$$B_{\text{odcinka}} = \alpha' M_{\text{odcinka}}(L^2 + Ll + l^2)$$

Gdy odcinek staje się coraz krótszy ($l \to L$) cała jego masa jest w stałej odległości L, więc moment bezwładności, będąc dany powyższym wzorem, musi zarazem być równy: $B_{\text{odcinka}} = M_{\text{odcinka}}L^2$. By nie było sprzeczności musi oczywiście być: $\alpha' = 1/3$ i ostatecznie:

$$B_{\text{koniec pręta}} = \frac{1}{3}ML^2$$

Gdy odcinek obraca się wokół osi przechodzącej nie przez koniec, a przez środek, może być potraktowany jak dwa odcinki o masie $M/2$ i długości $L/2$ każdy, a to spowoduje że jego moment bezwładności wyniesie: $2 \times (1/3)(M/2)(L/2)^2 = (1/12)ML^2$:

$$B_{\text{środek pręta}} = \frac{1}{12}ML^2$$

Kula

Nim obliczymy B dla kuli, zrobimy to dla cienkiej powłoki sferycznej o promieniu R. Nazywając oś obrotu osią Z, możemy dla odległości r_i każdego elementu sfery o współrzędnych x, y, z napisać twierdzenie Pitagorasa: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Suma takich kwadratów odległości mnożonych przez masy elementów rozbija się na dwa składniki: z x-ami i y-kami. Są one z oczywistych powodów równe sobie (po uwzględnieniu całej sfery). Taki sam rezultat dało by podstawienie z-ów, więc suma z x-ami i y-kami wynosi $2/3$ sumy z kombinacją: $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$:

$$\sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \frac{2}{3}\sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa suma trzech kwadratów współrzędnych to po prostu kwadrat promienia R, i ostatecznie:

$$B_{\text{powłoki}} = \frac{2}{3}MR^2$$

Od tego momentu postępowanie dla kuli jest analogiczne jak dla walca. Wprowadzając nieznany narazie współczynnik α'' wyrażamy moment bezwładności *kuli wydrążonej* o promieniach: r i R przez ten współczynnik:

$$\alpha''\rho\frac{4}{3}\pi(R^5 - r^5)$$

(skorzystaliśmy z wzoru na objętość kuli), a następnie eliminujemy gęstość na rzecz masy wydrążonej częściowo kuli:

$$M_{\text{wydrążonej}} = \rho\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

uzyskując:

$$B_{\text{wydrążonej}} = \alpha'' M_{\text{wydrążonej}}\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

Łatwo sprawdzić, że obok znanej tożsamości dla różnicy trzecich potęg obowiązuje analogiczna tożsamość dla różnicy piątych potęg:

$$R^5 - r^5 = (R - r)(R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4)$$

Prowadzi to do:

$$B_{\text{wydrążonej}} = \alpha'' M_{\text{wydrążonej}} \frac{R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4}{R^2 + R r + r^2}$$

Powtarzamy po raz trzeci nasz chwyt: zastępując w powyższym wzorze promień wewnętrzny r promieniem zewnętrznym R uzyskujemy moment bezwładności nieskończenie cienkiej sfery wyrażony przez α''. Musi on być zgodny z wynikiem dla tej sfery obliczonym niezależnie przed chwilą. Musi być:

$$\alpha'' \frac{5R^4}{3R^2} = \frac{2}{3} R^2,$$

czyli $\alpha'' = 2/5$. Ostatecznie:

$$B_{\text{kuli}} = \frac{2}{5} M R^2$$

Walec wokół osi prostopadłej

Mając wyniki dla niektórych brył można „tanim kosztem” wyznaczyć wartość momentu bezwładności innej bryły. Umieśćmy walec pełny (o promieniu R i wysokości h) w układzie współrzędnych tak, by jego oś pokrywała się z osią Z, a środek z początkiem układu. Kwadrat odległości elementu od osi X wynosi $y^2 + z^2$. Dla obliczenia momentu bezwładności wokół osi X, poprzecznej względem osi symetrii walca, trzeba obliczyć sumę takich wielkości po pomnożeniu ich przez masę elementu. Wynik rozpada się na dwa składniki — od sumowania z^2, i od sumowania y^2. Pierwszy jest identyczny z momentem bezwładności pręta (o masie walca) umieszczonego na osi Z, czyli $\frac{1}{12} M h^2$. Drugi składnik potraktujemy podobnie jak przy powłoce sferycznej. Składnik z y-kiem jest taki jakby był z x-em, czyli połową sumy z

(x^2+y^2). Ale suma iloczynów mas z $x^2+y^2=r^2$ jest momentem bezwładności wokół osi Z, a ten już znamy. Ostatecznie:

$$B = M(\frac{h^2}{12}+\frac{R^2}{4})$$

Twierdzenie Steinera

Bryła o konkretnym kształcie nie musi obracać się wokół swego środka! Wystarczy pomyśleć o zegarze wahadłowym, w którym solidny (przeważnie mosiężny) dysk przytwierdzony prętem waha się wokół osi odległej od środka dysku o kilka promieni dysku. Zamiast układać tablice wartości momentu bezwladności, np. walca, obracającego się wokół osi odległych o różne odległości, wymyślono jak prosto wyrazić moment bezwładności bryły wokół osi odległej od środka masy o d poprzez moment wokół osi przechodzącej przez środek, i przez tę odległość d.

Niech osią obrotu będzie oś Z, środek masy niech będzie umieszczony w początku układu. Obliczamy moment bezwładności wokół osi równoległej do osi Z, ale przebijającej płaszczyznę x-y w punkcie $(0,d)$. Odległość dowolnego punktu od tej osi wynosi:

$$x_i^2+(y_i-d)^2 = d^2+(x_i^2+y_i^2)-2dy_i$$

Jeśli odległość tę pomnożymy przez masę i wykonamy sumę po wszystkich elementach bryły, pierwszy składnik da nam Md^2, drugi da nam moment względem początku układu (a wiec względem środka masy). Trzeci element da wkład, któremu można nadać postać:

$$-2d\sum m_i y_i$$

Zgodnie z określeniem położenia środka masy, suma w ostatnim wzorze to y-owa współrzędna środka masy mnożona przez M. Ale środek masy leży w początku układu. Suma ta jest więc zerem! Ostatecznie:

$$B_{\text{odl. } d} = Md^2 + B_{\text{śr. masy}}$$

To właśnie jest *twierdzenie Steinera.*

Kwadrat

Dzięki twierdzeniu Steinera można poszerzyć krąg brył o dających się policzyć prosto momentach bezwładności. Moment bezwładności kwadratu względem osi przechodzącej przez środek (i prostopadłej do płaszczyzny kwadratu) można zapisać jako: $\alpha_{\mathrm{kw}} M a^2$, gdzie M masa, zaś a — bok kwadratu. Tenże kwadrat można potraktować jako sumę czterech kwadratów z których każdy ma w środku jeden róg. Oś obrotu jest teraz odległa od środka każdego z małych kwadratów o $a\sqrt{2}/4$, więc zgodnie z twierdzeniem Steinera każdy z nich wnosi wkład:

$$\frac{M}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \alpha_{\mathrm{kw}}\frac{M}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Po pomnożeniu przez 4 i uporządkowaniu, mamy prawo przyrównać ten wynik do wyjściowej formuły $\alpha_{\mathrm{kw}} M a^2$. Prowadzi to do równania:

$$\alpha_{\mathrm{kw}} M a^2 = \frac{Ma^2}{8} + \alpha_{\mathrm{kw}}\frac{Ma^2}{4}$$

sprowadzającego się do: $\frac{3}{4}\alpha_{\mathrm{kw}} = \frac{1}{8}$, czyli do: $\alpha_{\mathrm{kw}} = \frac{1}{6}$. Daje to ostatecznie:

$$B_{\mathrm{kw}} = \frac{1}{6} M a^2$$

Pozostawiamy Czytelnikowi do sprawdzenia, że dla prostokąta o bokach a, b otrzymuje się na tej drodze:

$$B_{\mathrm{prostokąt}} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

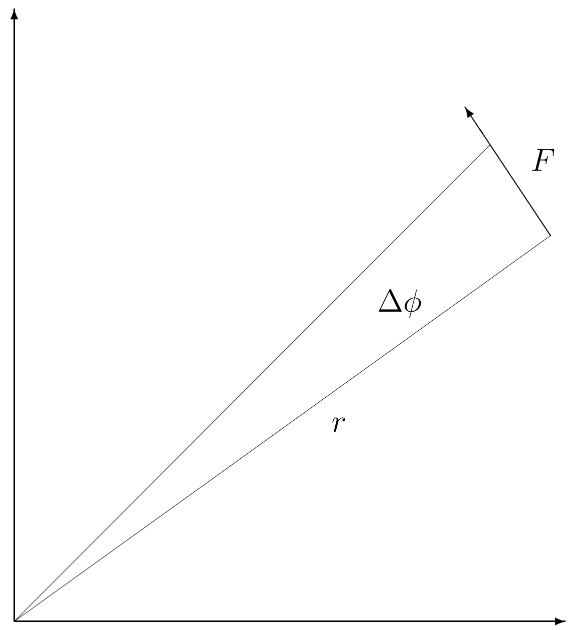
A oto tabela z niektórymi użytecznymi wynikami obliczeń momentu bezwładności kilku brył.

Bryła	Moment
Walec	$1/2MR^2$
Walec (oś poprzeczna)	$M(h^2/12+R^4/4)$
Pręt (oś z boku)	$1/3ML^2$
Pręt (oś przez środek)	$1/12ML^2$
Sfera	$2/3MR^2$
Kula(pełna)	$2/5MR^2$
Prostokąt	$1/12M(a^2+b^2)$
Oś przez ś.m.	B
Oś w odl. d od śr.masy	$B+Md^2$

5.3 Moment sił

5.3.1 Moment sił skupionych

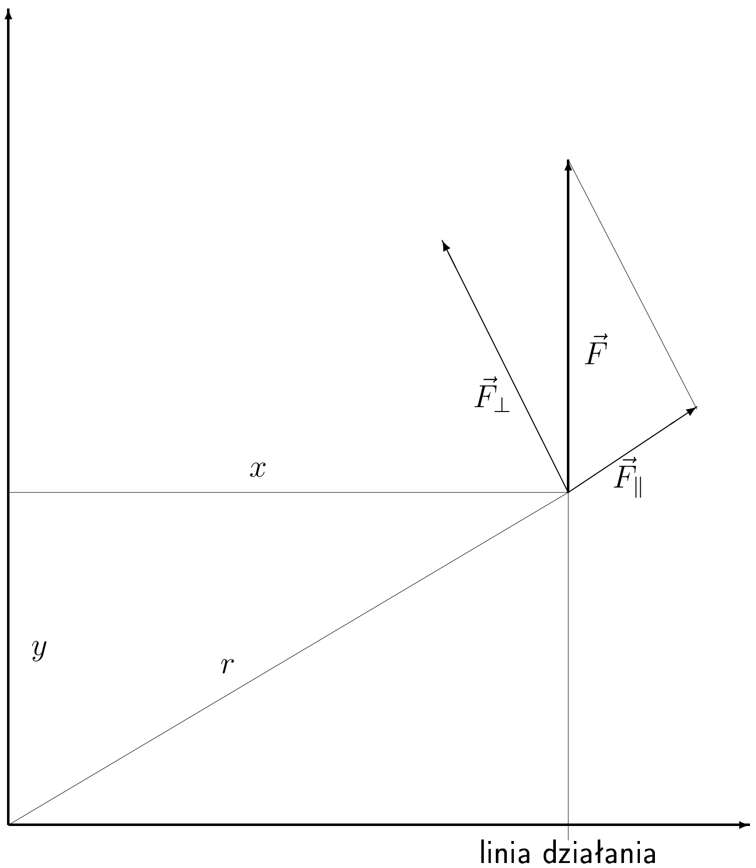
Praca siły, tak jak pojawiła się w rozważaniach nad zmianami energii układu oddziałujących punktów materialnych, jest iloczynem siły przez przesunięcie w kierunku tej siły. Gdy bryła się obraca (lub mogłaby się obracać) wokół określonej osi, przesunięcie punktu układu, na który działa rozpatrywana siła, wiąże się w prosty sposób z kątem obrotu (gdy jest on niewielki, ale to wystarcza). Gdy konfiguracja jest taka jak na rysunku:



przesunięcie przy obrocie o kąt $\Delta\phi$ wynosi $r\Delta\phi$, a praca: $\Delta L = Fr\Delta\phi$. Wielkość rF jaka się pojawiła to właśnie *moment siły*. Oznaczmy go literą N. Odległość r nazywa się *ramieniem siły*. Mamy:

$$N = rF, \quad \Delta L = N\Delta\phi$$

Rzadko będziemy mieli tyle szczęścia, by wektor wodzący punktu na który działa siła, był akurat do tej siły prostopadły. Chcąc obliczyć pracę w sytuacji jak na następnym rysunku:



możemy potraktować siłę jako sumę dwóch składowych. Pracę wykonuje tylko siła $F_\perp$. Jej ramieniem jest $\sqrt{x^2+y^2}$. Moment siły wynosi zatem: $\sqrt{x^2+y^2}F_\perp$. Ale z podobieństwa trójkątów o bokach $(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ i bokach $(F_\perp, F_\parallel, F)$, wynika

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{F_\perp}{F}$$

Możemy więc wyrazić ten moment inaczej:

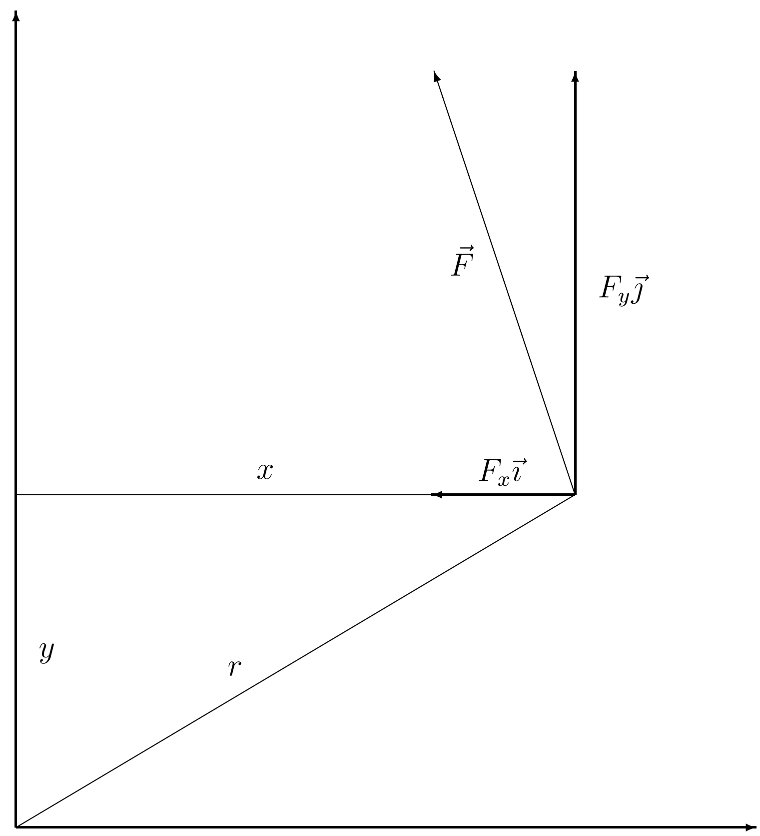
$$N = xF$$

Ramieniem całej siły F — w tym wypadku x — nie jest odległość od osi do punktu na który działa siła, lecz odległość od osi do ukazanej na rysunku tzw. linii działania siły.

W powyższym przykładzie oś Y poprowadziliśmy równolegle do kierunku siły (lub jak kto woli mamy siłę która akurat, w sposób szczególny ma tylko jedną współrzędną). Zatem nasz wzór można też przepisać:

$$N = xF_y$$

Nic nie stoi na przeszkodzie rozważyć przypadek jeszcze ogólniejszy, gdy punkt poddany działaniu siły ma obie współrzędne różne od zera, i siła ma obie współrzędne różne od zera. W sytuacji jak na rysunku:



możemy rozpatrzyć pracę obu sił: siły $F_x\vec{\imath}$ i siły $F_y\vec{\jmath}$. O ile ramieniem siły składowej na oś Y jest, jak poprzednio x, to ramieniem siły poziomej jest oczywiście y. W sytuacji jak na rysunku, obie siły wykonują pracę dodatnią przy obrocie od osi X do Y, a współrzędna x-owa siły jest ujemna — trzeba ten znak uwzględnić w wyrażeniu na moment pisząc:

$$N = xF_y - yF_x$$

To bardzo charakterystyczna kombinacja współrzędnych dwóch wektorów. Będziemy ją spotykali często.

Dodatnia wartość momentu oznacza, że praca dodatnia jest wykonywana, gdy obracamy — jakby usiłując nasunąć oś X na Y — a ujemna gdy obracamy przeciwnie. Gdy moment jest ujemny jest dokładnie na odwrót.

Gdy działa wiele sił, ich praca jest sumą prac poszczególnych sił:

$$\Delta L = \sum N_i \Delta\phi = \Delta\phi \sum N_i = N_{\text{całk}} \Delta\phi$$

A zatem i w tym ogólnym przypadku praca wyraża się iloczynem kąta i momentu całkowitego sił. Jest on sumą momentów wszystkich sił.

5.3.2 Moment sił rozciągłych

Siły grawitacji działają na każdy element bryły, jest ich niesłychanie dużo. Obliczenie sumy momentów tych sił wydawać się może trudne, ale po pierwsze, wcale tak nie jest, po wtóre trzeba to zrobić.

Umieśćmy początek układu współrzędnych x, y tam gdzie płaszczyznę tę przecina oś obrotu. Oś Y wybieramy pionowo do góry. Moment siły $F_y = -m_i g$ pomyślanego elementu, którego współrzędna pozioma jest x_i, wynosi: $N_i = -m_i g x_i$, a moment całkowity:

$$N_{\text{całk}} = -g \sum m_i x_i$$

Zgodnie z definicją środka masy, jego współrzędna pozioma, oznaczmy ją $x_{\text{śr}}$, wynika z równania:

$$Mx_{\text{śr}} = \sum m_i x_i$$

Dokładnie ta suma pojawiła się w wyrażeniu na moment całkowity. Zatem:

$$N_{\text{całk}} = -Mgx_{\text{śr}}$$

Jest to bardzo ważny rezultat. Łączny moment sił ciężkości ciała **jest identyczny jak moment pojedynczej siły ciężkości** $M\vec{g}$ **skupionej w środku masy**. W związku z tym środek masy jest też nazywany *środkiem ciężkości.*

5.4 Dynamika ruchu obrotowego

5.4.1 Związek momentu sił z przyspieszeniem kątowym

Uzbrojeni w znajomość zależności energii kinetycznej ruchu obrotowego od prędkości kątowej i pracy sił od kąta obrotu, możemy teraz skorzystać z udowodnionego wcześniej dla układu punktów materialnych twierdzenia, że zmiana energii kinetycznej elementów układu, równa się pracy sił działających na wszystkie punkty tego układu. Ponieważ praca sił spoistości jest zero, WYSTARCZY uwzględniać pracę tylko sił zewnętrznych:

$$\Delta\left(\frac{B\omega^2}{2}\right) = \Delta L = N_{\text{całk}}\Delta\phi$$

Jak wielokrotnie widzieliśmy, przyrost kwadratu pewnej wielkości w^2 wyraża się przez przyrost samej tej wielkości w sposób następujący: $\Delta w^2 = 2w\Delta w$. Pozwala to napisać:

$$B\omega\Delta\omega = N_{\text{całk}}\Delta\phi$$

Jeżeli teraz ω po lewej stronie zastąpimy przez $\Delta\phi/\Delta t$ i podzielimy obie strony równania wyrażającego bilans energii kinetycznej i pracy przez $\Delta\phi$, dostaniemy:

$$B\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = B\epsilon = N_{\text{całk}}$$

Moment bezwładności razy przyspieszenie kątowe równa się sumie momentów sił działających na bryłę[2].

[2]W niektórych podręcznikach nazywa się powyższy związek „Zasadą dynamiki ruchu obrotowego". Jak przekonaliśmy się naocznie, związek ten wynika z wcześniej dyskutowanych zasad dynamiki punktów materialnych, może więc być nazwany twierdzeniem mechaniki, ewentualnie prawem dynamiki bryły, ale nie zasadą. Zasada to coś na czym się **zasadza** dalsze rozumowanie, rzecz wzięta wprost z doświadczenia, lub obserwacji.

5.4.2 Zastosowania

Dźwignia

Gdy bryła ma być nieruchoma, jej przyspieszenie kątowe musi oczywiście być równe zeru! Poznane powyżej prawo oznacza, iż w równowadze, suma momentów sił działających na bryłę musi być równa zeru. Dźwignia dwustronna (zasadniczy element wagi), w szczególności, jest w równowadze, gdy przyłożone siły spełniają warunek:

$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

Jeśli ramiona są równe, a siłami są naciski $m_1 g$ i $m_2 g$ wywierane przez pewne ciała, warunek równowagi sprowadza się do równości mas. To jest najdoskonalszy sposób ważenia dla „zwykłych" ciał. Przy wyznaczaniu dużych mas (ale ciągle „zwyczajnych"), używa się wag z dźwignią nierównoramienną. Wzorcowe ciała (odważniki) nie muszą wtedy być tak ciężkie jak wagon kolejowy!

Wahadło realne

W jednym z poprzednich rozdziałów badaliśmy ruch tzw. wahadła matematycznego. Jego najbliższą realizacją praktyczną, której już nie da się udoskonalić, jest kulka o promieniu R zawieszona na nitce o takiej długości, że odległość środka kuli od osi obrotu wynosi l. Jaki jest teraz okres obrotu?

Moment bezwładności względem tej osi daje twierdzenie Steinera:

$$B = Ml^2 + \frac{2}{5}MR^2$$

Moment siły ciężkości:

$$N = -Mgl\sin\phi$$

Prawo dynamiki wyraża przyspieszenie kątowe przez iloraz momentu siły i momentu bezwładności. Zakładając, że amplituda wahań jest niewielka i sinus może być zastąpiony kątem w mierze łukowej, dostajemy:

$$\epsilon = -\frac{gl}{l^2 + 0,4R^2}\phi$$

Przyspieszenie (kątowe) proporcjonalne jest do wychylenia (kątowego) ze znakiem minus, ruch jest więc harmoniczny z okresem, który dostaniemy z przyrównania tego współczynnika do wartości $4\pi^2/T^2$ jaka zawsze charakteryzuje ruch harmoniczny. Prowadzi to do:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \times \sqrt{1 + \frac{2R^2}{5l^2}}$$

Ostatni pierwiastek jest czynnikiem przez jaki trzeba pomnożyć okres wahadła matematycznego o długości l, by dostać prawdziwy okres wahań. Pominięcie tego prowadziłoby do błędu. Przy promieniu R dziesięciokrotnie mniejszym od l, liczbowa wartość tej poprawki wynosi $\sqrt{1,004} = 1,002$, czyli 0,2%. Przy wyznaczaniu g, na przykład, zaniedbanie tego efektu doprowadziłoby do wyniku $9,77\mathrm{m/s}^2$, zamiast 9,81. Czy to dużo, czy mało — można dyskutować, ale tak czy inaczej, dobrze jest umieć policzyć taką poprawkę.

Bloczek nieruchomy

Rozwiązywaliśmy zadanie o dwóch klockach, z których jeden leżał na stole, a drugi zwisał na nitce i go ciągnął. W podobnej sytuacji rozsądne jest użyć bloczka, radykalnie zmniejszającego tarcie nitki. Bloczek wpływa na wartość przyspieszenia klocków.

Prędkość nitki równa jest prędkości bloczka na obwodzie, jeśli jego promień jest R, prędkość kątowa wyniesie: $\omega = v/R$. Energia kinetyczna obu klocków i bloczka wyniesie:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}(M + m + B/R^2)v^2$$

Powtarzając bilans energii identycznie jak poprzednio, gdy nitka ślizgała się po krawędzi stołu, dostaniemy na wartość przyspieszenia:

$$a = \frac{mg}{M + m + B/R^2}$$

Toczenie po równi pochyłej

Energię kinetyczną toczącej się bryły obrotowej można wyliczyć na dwa sposoby. Można skorzystać z udowodnionego we wcześniejszych rozdziałach twierdzenia, że energia kinetyczna jest równa sumie energii kinetycznej całości i energii kinetycznej w układzie środka masy. Gdy promień bryły jest R, toczenie bez poślizgu oznacza że $\omega = v/R$. Zatem pełna energia kinetyczna:

$$E_{\text{kin}} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{B\omega^2}{2} = \frac{(M + B/R^2)v^2}{2}$$

Można też potraktować toczenie jako obrót wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt styku z podłożem, a więc odległej od środka o R. Zgodnie z Twierdzeniem Steinera dostaje się dla energii kinetycznej: $(MR^2 + B)\omega^2/2 = (M + B/R^2)v^2/2$, a więc wszystko się zgadza.

Jeśli bryła stacza się z równi o wysokości h i długości l, na której w odległości x od punktu odniesienia energia potencjalna wynosi: $-Mgx\frac{h}{l}$, bilans energii daje:

$$(M + B/R^2)v\Delta v = Mg\frac{h}{l}\Delta x$$

co po zastąpieniu prędkości v przez $\Delta x/\Delta t$ i podzieleniu przez Δx daje:

$$a = g\frac{h}{l}\frac{1}{1 + B/(MR^2)}$$

Przy zsuwaniu się ciała bez tarcia i bez obrotu, przyspieszenie wynosi: $gh/l = g\sin\alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia. Toczenie spowalnia więc ruch. Dla kuli przyspieszenie toczenia jest mniejsze od przyspieszenia zsuwania o czynnik $\frac{1}{1+B/(MR^2)} = 5/7$. Dla walca o czynnik $2/3$. Dla bryły wydrążonej spowolnienie będzie większe. Dla cienkiej rury przyspieszenie toczenia z równi jest dwa razy mniejsze od przyspieszenia zsuwania.

5.5 Moment pędu

5.5.1 Moment pędu bryły

Któż z nas nie widział w telewizji popisów tancerek na lodzie. Tu zainteresują nas piruety. Łyżwiarka pracą nóg wprawia się w wirowanie jak najszybsze w pozycji z rozstawionymi szeroko nogami i wyciągniętymi poziomo ramionami. Uznawszy, że już osiągnęła maksimum, ściąga gwałtownie i nogi i ramiona jak najbliżej tułowia. Jej prędkość kątowa wirowania gwałtownie przy tym wzrasta. To właśnie jest piruet.

W obu fazach ruchu, tj. najpierw z rozstawionymi kończynami, potem z dostawionymi możliwie blisko osi obrotu, łyżwiarka ma ustaloną wartość momentu bezwładności, ale te dwie wartości są niewątpliwie różne. Moment bezwładności w fazie drugiej jest mniejszy.

Zbadajmy jak zmienia się prędkość kątowa bryły, gdy dokona się w niej przemieszczenie części masy, prowadzące do zmiany momentu bezwładności. Skorzystamy tylko z tego co wiemy, że praca sił prowadzi do wzrostu energii kinetycznej.

Po to by sprawnie przeprowadzić ten bilans rozszerzymy argumentację, prowadzącą do wyrażenia przyrostu kwadratu wielkości przez tę wielkość ($\Delta w^2 = 2w\Delta w$), na przyrost iloczynu dwóch różnych wielkości: a i b.

$$\Delta(ab) = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab = a\Delta b + b\Delta a + \Delta a \times \Delta b$$

Jak wielokrotnie podkreślaliśmy, przy badaniu przyrostów w mechanice, niezbędnych do określenia chwilowej prędkości, przyspieszenia, itp. iloczyny przyrostów nie muszą i **nie są** uwzględniane. Dlatego piszemy:

$$\Delta(ab) = a\Delta b + b\Delta a$$

To bardzo ważna reguła. Przyrost kwadratu wielkości jest jej szczególnym przypadkiem.

Dowolne przemeblowania rozkładu materii bryły można zrealizować przez kolejne, czy równoczesne, przemieszczanie małych jej fragmentów — punktów materialnych. Wystarczy się zająć przemieszczeniem jednego takiego punktu. Jeśli wykażemy, że jakaś wielkość się przy tym nie zmienia, nie zmieni się ona i w wyniku przemieszczeń dowolnej liczby elementów.

Wybrany do przemieszczenia punkt o masie m uczestniczy w obrocie bryły, bo jego otoczenie wywiera na niego siłę dośrodkową $m\omega^2 r$. Tym „otoczeniem" może być linka radialnie napięta, utrzymywana przez coś, lub przez kogoś znajdującego się bliżej osi. No i decydujemy się (jak wiadro ze studni) przyciągnąć masę bliżej środka o jakieś Δr i ją w nowym położeniu zostawić. Moment bezwładności zmieni się przy tym o:

$$\Delta B = \Delta(mr^2)$$

Urządzenie ciągnące (np. mięśnie łyżwiarki) wykorzystując energię wewnętrzną wykona pracę

$$\Delta L = -m\omega^2 r\Delta r = -\frac{1}{2}\omega^2\Delta(mr^2) = -\frac{1}{2}\omega^2\Delta B$$

(Znak minus stąd, że praca jest dodatnia, a Δr ujemne.) Praca ta musi powiększyć energię kinetyczną:

$$\Delta(B\omega^2/2) = \Delta L = -\frac{\omega^2}{2}\Delta B$$

Stosując do lewej strony wzór na przyrost iloczynu i przenosząc wyrazy na jedną stronę dostajemy:

$$\frac{\omega^2}{2}\Delta B + B\omega\Delta\omega + \frac{\omega^2}{2}\Delta B = 0$$

Po redukcji wyrazu pierwszego i trzeciego i po podzieleniu przez ω, dostajemy:

$$0 = \omega\Delta B + B\Delta\omega = \Delta(B\omega)$$

Iloczyn momentu bezwładności i prędkości kątowej pozostaje stały gdy na układ ciał działają tylko siły wewnętrzne

Powyższe twierdzenie rządzi piruetem, ale nie tylko. Także dynamiką ciasnych gwiazd podwójnych, gdy występuje przepływ masy od jednego do drugiego składnika układu. Także wtedy, gdy kurczy się protogwiazda, czy gromada gwiazd. Także ruchem kota gdy kręci ogonem, by spaść w końcu na cztery łapy.

Iloczyn momentu bezwładności i prędkości kątowej nazywa się *momentem pędu* i oznacza przeważnie literą J. Udowodniliśmy więc (dla dość szczególnego, ale bardzo istotnego przypadku) prawo zachowania momentu pędu.

5.5.2 Moment pędu punktu materialnego

Czytelnik zastanawia się zapewne, co wspólnego mają ze sobą moment siły i moment pędu, że je podobnie nazywają. W ukształtowanej historycznie terminologii trudno dopatrzeć się za dużo konsekwencji, ale jakaś chyba jest. Skoro i siła i pęd są wektorami, to moment siły i moment pędu powinny się analogicznie wiązać z siłą i pędem.

Istota momentu siły, tak jak się nam on pojawił przy obliczaniu pracy, to iloczyn siły przez jej ramię. Zapisany przy pomocy współrzędnych iloczyn ten wynosi: $xF_y - yF_x$. Przy obrocie bryły pęd elementu bryły $mv = m\omega r$ jest styczny do okręgu będącego torem tego elementu a jego ramię jest oczywiście r. A zatem ramię×pęd$=mr^2\omega$, a po zsumowaniu wkładów od wszystkich elementów wyjdzie istotnie $\omega \sum mr^2 = B\omega$.

Nietrudno domyślać się, że dla dowolnego zbioru punktów, nie tylko dla bryły sztywnej, a więc gdy składniki układu mają pędy skierowane rozmaicie, niekoniecznie prostopadle do wektorów wodzących, pojęcie momentu pędu pełni swoją ważną rolę. Z definicją nie mamy wątpliwości, w każdym razie dla ruchu w jednej płaszczyźnie, jak dla planety krążącej wokół Słońca.

$$J = xp_y - yp_x$$

Obliczmy przyrost tej wielkości w miarę upływu czasu. Skorzystamy przede wszystkim z reguły obliczania przyrostu iloczynu. Ponieważ moment pędu składa się z dwóch części, razem dostaniemy cztery składniki:

$$\Delta J = p_y\Delta x + x\Delta p_y - p_x\Delta y - y\Delta p_x$$

Każdy z przyrostów proporcjonalny jest do czasu: przyrost współrzędnej z współczynnikiem równym prędkości, przyrost pędu z współczynnikiem równym sile. Daje to:

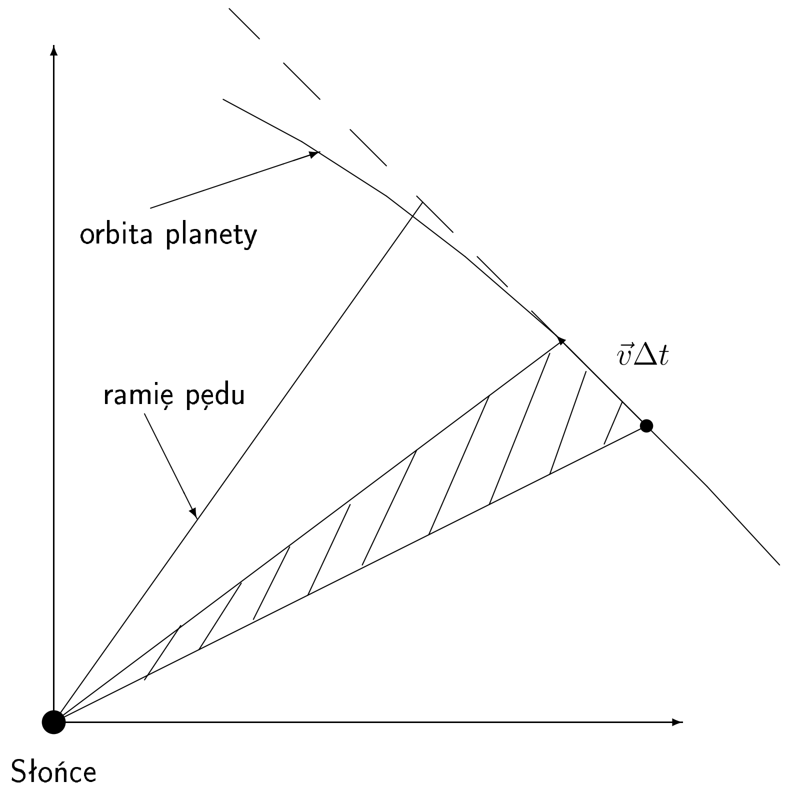
$$\Delta J = \Delta t(v_x p_y - p_x v_y + xF_y - yF_x)$$

Pierwsze dwa człony w nawiasie okrągłym niczym się nie różnią. Wyrażając pęd przez masę dostaje się bowiem:

$$v_x p_y - p_x v_y = m(v_x v_y - v_x v_y) = 0$$

Pozostałe dwa człony to znany nam moment siły. Jeżeli siła skierowana jest stale do jednego punktu, i jeżeli względem tego punktu określamy ramię, to moment siły znika i moment pędu jest stały.

Prawo zachowania momentu pędu planety jest nieocenionym narzędziem przy badaniu torów eliptycznych. Ramię pędu zmienia się w takim ruchu i prawo stałości momentu pędu daje dodatkowy związek między prędkością a położeniem. Łatwo pokazać, że to właśnie stałość momentu pędu gwarantuje stałość prędkości polowej planety. W tym celu popatrzmy na rysunek:



Zacieniowany trójkąt, o podstawie $\vec{v}\Delta t$ i wierzchołku w Słońcu, ma wysokość będącą ramieniem prędkości (i pędu). Zatem jego pole to

$$\frac{1}{2}v\Delta t \times \text{ramię} = \frac{\Delta t}{2m}p \times \text{ramię} = \frac{J}{2m}\Delta t$$

Prędkością polową nazywa się stosunek pola trójkąta do czasu. Widzimy, że prędkość ta wynosi $J/(2m)$, jest więc stała.

Rozdział 6

Uzupełnienia

6.1 Orbity planet

Niejednego z Was intryguje zapewne, jak z praw Newtona dostać orbity eliptyczne (ogólniej także paraboliczne i hiperboliczne), jakże to może być takie trudne, skoro Newtonowi udało się to ponad trzysta lat temu, a od tego czasu taki nastąpił rozwój, tyle doszło nowych przemyśleń i metod rachunkowych. Wiadomo z praktyki, że pierwsze rozwiązanie problemu teoretycznego jest dużo zawilsze i mniej bezpośrednie od tego co można wymyślić pracując dalej nad tym zagadnieniem.

Postanowiliśmy tu zaprezentować sposób wyznaczenia kształtów orbit w polu siły odwrotnych kwadratów, różny od tego co rutynowo spotyka się w podręcznikach fizyki na poziomie wyższym, gdzie potrzebna jest znajomość matematyki przekraczająca to, czego zwyczajowo uczymy się w szkole średniej.

Aparat rachunkowy potrzebny do tego celu już mamy. Są to trzy używane wielokrotnie reguły obliczania przyrostów:

$$\Delta(w^2) = 2w\Delta w, \quad \Delta\frac{1}{w} = -\frac{\Delta w}{w^2}, \quad \Delta ab = a\Delta b + b\Delta a$$

Umieśćmy w początku układu Słońce (to dla konkretności — równie dobrze mógłby to być Jowisz, albo jądro atomowe, albo środek masy układu Ziemia-Księżyc, itp.) i wprowadźmy w płaszczyźnie ruchu współrzędne x, y. Oznaczmy zwyczajnie odległość od początku układu literą r. Pitagoras nas nauczył, że $r^2 = x^2 + y^2$.

Zapiszmy także prawo powszechnego ciążenia w postaci wektorowej, jak dotąd nie używanej — pamiętaliśmy jedynie że przyciąganie działa do środka:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

Dodatkowe, w porównaniu z najprostszą formą zapisu tego prawa, wyrazy: $-\frac{\vec{r}}{r}$ są wersorem jednostkowym skierowanym przeciwnie do promienia wodzącego. Modyfikacja ta nie zmienia oczywiście wartości, przypomina o kierunku i pozwala na podanie współrzędnych siły. Oto one:

$$(F_x, F_y) = GMm\left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}\right)$$

Rachunek poniższy kształtu orbity (można to nazwać wyprowadzeniem z praw Newtona pierwszego prawa Keplera) jest szczególnie dopasowany do tego akurat zagadnienia, pierwsze kroki dowodu nie nasuwają się w sposób naturalny, rutynowy — nie próbuj Czytelniku zastanawiać się już przy pierwszym przekształceniu ... dlaczego właśnie tak zaczynamy?

Napiszmy na początek:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{(r^2)}$$

Zapis po lewej stronie akcentuje, że wielkość ta jest kwadratem czegoś, drugi że jest odwrotnością. Obliczmy przyrost tej wielkości korzystając dla lewej strony z przyrostu kwadratu, dla prawej z przyrostu odwrotności:

$$2\frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{r^4}\Delta\left(r^2\right)$$

Dla prawej strony możemy jeszcze raz skorzystać z przyrostu kwadratu: $\Delta\left(r^2\right) = \Delta(x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y$. Pozwala to napisać:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{r^3}(x\Delta x + y\Delta y)$$

A teraz obliczymy przyrost następującego wyrażenia:

$$\frac{x}{r} = x\frac{1}{r}$$

traktowanego jak iloczyn dwóch czynników. Otrzymujemy (z wykorzystaniem znalezionego przed chwilą przyrostu odwrotności r):

$$\Delta\frac{x}{r} = (\Delta x)\frac{1}{r} - \frac{x}{r^3}(x\Delta x + y\Delta y)$$

Doprowadzenie do wspólnego mianownika i redukcja wyrazów podobnych dają ostatecznie:

$$\Delta\frac{x}{r} = -\frac{y}{r^3}(x\Delta y - y\Delta x) = -\frac{y}{r^3}(xv_y - yv_x)\Delta t$$

Powyższe było zwyczajną matematyką, tego rodzaju przekształceń i tożsamości można by wymyślać miliony. W tej naszej tożsamości pojawiły się dwie kombinacje wielkości sugerujące zastosowanie w fizyce. Po pierwsze x/r^3 i y/r^3 to prawie składowe siły Newtona (Wystarczy pomnożyć przez stosowną stałą). Po drugie nawias: $(xv_y - yv_x)$, to niedawno poznany moment wektora, w tym wypadku wektora prędkości. Jest to podwojona prędkość polowa planety, a więc wielkość stała w czasie ruchu.

Po to by uzyskać coś użytecznego, pomnóżmy więc otrzymaną tożsamość przez GM (Stała grawitacji i masa Słońca). Zauważmy, że $-GMy/r^3$ nie jest siłą (brakuje masy ciała m), ale przyspieszeniem. W połączeniu z przyrostem czasu da to przyrost prędkości: $\Delta v_y = -GMy/(r^3)\Delta t$, prowadząc do:

$$\Delta(GMx/r) = (\Delta v_y)(xv_y - yv_x)$$

Stałość w czasie kombinacji: $xv_y - yv_x$ pozwala zapisać iloczyn przyrostu prędkości i tej wielkości jako przyrost *iloczynu* prędkości i tego nawiasu:

$$\Delta(GMx/r) = \Delta[v_y(xv_y - yv_x)]$$

To jest to o co chodziło!

Równość dwóch przyrostów oznacza, że różnica POZOSTAJE STAŁA. To jest nowe prawo zachowania. W problemie ruchu w polu siły odwrotnych kwadratów odkrył je po raz pierwszy Laplace, potem było ono „odkrywane” jeszcze wielokrotnie, jako że nie zrobiło zbytniej „kariery” naukowej, takiej jak prawa zachowania pędu, energii, czy momentu pędu i nie było powszechnie znane.

Wkroczyło ponownie do nauki w związku z kwantową teorią atomu wodoru, ale to zupełnie odrębna historia.

Napiszmy więc:

$$GMx/r - v_y(xv_y - yv_x) = A_x = \text{const}$$

gdzie wartość tego wyrażenia, wyznaczoną przez warunki początkowe, oznaczyliśmy A_x.

Jest jasne, że literalnie to samo można powtórzyć dla współrzędnej y, mamy więc:

$$GMy/r - v_x(yv_x - xv_y) = A_y = \text{const}$$

Teraz już cel jest bliski. Mnożymy pierwsze z równań przez x, drugie przez y, dodajemy i ... zauważamy, że po wyłączeniu wspólnego czynnika z prędkością polową, kombinacja $(xv_y - yv_x)$ pojawia się jeszcze raz. Uwzględniając ponadto, że:

$$x\frac{x}{r} + y\frac{y}{r} = \frac{x^2 + y^2}{r} = \frac{r^2}{r} = r$$

dostajemy ostatecznie:

$$GMr = (xv_y - yv_x)^2 + xA_x + yA_y$$

W równaniu tym niby jeszcze są prędkości, ale już tylko w kombinacji będącej stałą w czasie ruchu. Korzystając z: $J = m(xv_y - yv_x)$, dostajemy równanie samej orbity:

$$GMr = J^2/m^2 + xA_x + yA_y$$

Po to by mieć w równaniu same współrzędne kartezjańskie podnosimy obie strony do kwadratu i korzystamy z tw. Pitagorasa:

$$G^2M^2(x^2 + y^2) = (J^2/m^2 + xA_x + yA_y)^2$$

W zmiennych x, y jest to równanie kwadratowe. W zależności od warunków początkowych, determinujących stałe dla danej orbity wielkości J, A_x i A_y może to być koło, elipsa, parabola, hiperbola.

Badanie tej krzywej można sobie ułatwić wybierając umiejętnie osie współrzędnych. Przecież ze Słońca w płaszczyźnie planety, można oś X poprowadzić nie „byle jak" (choć i to wolno), ale do punktu w którym styczna do toru jest prostopadła do promienia wodzącego. Punkt taki nie istnieje tylko wtedy, gdy ciało rzucono wprost na centrum i porusza się ono po prostej. W pozostałych przypadkach punkt o którym mówimy jest albo punktem najmniejszej, albo największej dla danego toru odległości od centrum.

Gdy oś x-ów przechodzi przez taki punkt, to zarówno y, jak i v_x są w tym punkcie równe zeru, i jak wynika z wzoru:

$$0 = GMy/r + v_x(xv_y - yv_x) = A_y$$

mamy już stale:

$$A_y = 0$$

Przyjęcie $A_y = 0$ nie jest ograniczeniem się do przypadku szczególnego, a jedynie przypomina, że naszym świadomym wyborem, oś x-ów przechodzi przez *perihelium*, lub *aphelium*. Przy takim wyborze współrzędnych — oznaczając R odległość od Słońca gdy $y = 0$, a przez v oznaczając v_y — dla stałych A_x i J/M mamy:

$$A_x = GM - Rv^2, \quad J/m = Rv$$

Podstawiając do równania orbity przed podniesieniem do kwadratu, a po podzieleniu przez GM mamy:

$$r = \left(1 - \frac{Rv^2}{GM}\right) x + R\frac{Rv^2}{GM}$$

Na parametry R i v można patrzeć jak na realne warunki początkowe nadawane przez człowieka pojazdowi kosmicznemu wystrzeliwanemu w odległości R z prędkością v w kierunku prostopadłym do promienia wodzącego, jak na słynnym rysunku Newtona.

Wygodnie jest oznaczyć kombinację stałych jedną literą:

$$\frac{Rv^2}{GM} - 1 = \epsilon, \quad \text{wtedy } R\frac{Rv^2}{GM} = R(1+\epsilon)$$

Równanie toru jest:

$$r = -\epsilon x + R(1+\epsilon)$$

Ów ϵ, to słynny mimośród elipsy. Gdy prędkość początkowa jest równa pierwszej prędkości kosmicznej: $v^2 = GM/R$ ów mimośród znika, a równanie staje się równaniem okręgu o promieniu R. Dla prędkości mniejszych, parametr ϵ jest ujemny, ale nigdy mniejszy od -1. Jak łatwo się przekonać (za chwilę jeszcze do tego wrócimy), odległość początkowa R jest w tym wypadku maksymalną na danej orbicie odległością od centrum. Ciało wystrzelone prostopadle do wektora wodzącego z prędkością mniejszą od pierwszej prędkości kosmicznej, zmniejsza swą odległość do centrum narażając się na zderzenie z powierzchnią ciała przyciągającego, gdy teoretycznie najbliższy punkt orbity jest mniejszy od jego promienia.

Dla prędkości większych ciało najpierw zwiększa swą odległość od centrum, a jego dalszy los zależy od tego czy ϵ jest mniejszy, czy większy od 1. Żeby się o tym przekonać podnosimy równanie do kwadratu i po przeniesieniu części wyrazów na jedną stronę dostajemy:

$$(1-\epsilon^2)x^2 + 2\epsilon R(1+\epsilon)x + y^2 = R^2(1+\epsilon)^2$$

Gdy epsilon osiągnie jedynkę (druga prędkość kosmiczna), równanie radykalnie się upraszcza — dostajemy znaną z teorii równań kwadratowych parabolę:

$$4Rx + y^2 = 4R^2$$

Dla prędkości mniejszych od drugiej prędkości kosmicznej, mimośród jest mniejszy od jedynki. Przekształcając przy tym założeniu trójmian ze zmienną x do tzw. postaci kanonicznej i dzieląc całe równanie przez wyraz wolny, dostajemy:

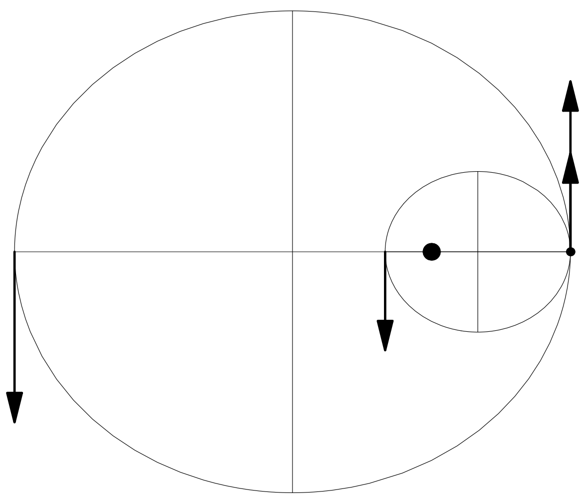
$$\frac{(x+\epsilon R/(1-\epsilon))^2}{(R/(1-\epsilon))^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{1-\epsilon^2}R/(1-\epsilon)\right)^2} = 1$$

Od okręgu elipsę różni w tym przedstawieniu to, że współczynniki przy wyrazach z x-em i y-kiem są różne. To powoduje, że można o elipsie myśleć jak o „spłaszczonym” okręgu.

Z równania odczytujemy bezpośrednio skrajne wartości x i y. Gdy $x = -\epsilon R/(1-\epsilon)$, wtedy człon z x-em się zeruje i elipsa oddala się maksymalnie od osi X przyjmując w wierzchołkach wartości:

$$y = \pm \frac{R\sqrt{1-\epsilon^2}}{(1-\epsilon)}$$

Współczynnik $b = R\sqrt{1-\epsilon^2}/(1-\epsilon)$ nazywa się *małą półosią* elipsy. Analogicznie $a = R/(1-\epsilon)$ to tzw. *duża półoś* elipsy. Na skrzyżowaniu linii łączących wierzchołki, w punkcie (-$\epsilon a, 0$), leży środek elipsy. Poniższy rysunek pokazuje dwie elipsy o $\epsilon = 1/2$ (większa prędkość) i o $\epsilon = -1/2$ (mniejsza prędkość).



Rysunek 6.1: Dwie orbity dla dwoch prędkości początkowych

Gdy mimośród ϵ jest ujemny, środek elipsy leży po dodatniej stronie osi x-ów, a to właśnie oznacza, iż punkt początkowy jest punktem orbity najdalszym od tego ogniska w którym jest centrum przyciągające.

Matematyczny opis krzywych, będących orbitami ciał poruszających się pod wpływem siły grawitacji, jest też możliwy przy użyciu azymutu i odległości, zamiast współrzędnych kartezjańskich x i y. Mierząc azymut od położenia początkowego (jak na rysunku), i korzystając z tego że $x = r\cos\phi$, możemy równanie orbity zapisać w postaci: $r = -\epsilon r\cos\phi + R(1+\epsilon)$, czyli:

$$r = \frac{R(1+\epsilon)}{1+\epsilon\cos\phi}$$

Dla mimośrodu dodatniego mianownik osiąga dla $\phi = 0$ swoje maksimum, a odległość r minimum. Dla parametru $\epsilon < 0$, dla wartości azymutu $\phi = 0$ jest osiągane minimum mianownika, czyli maksimum odległości. Dla azymutu $\phi = 180°$, gdy cosinus staje się równy -1, jest dokładnie na odwrót.

Skoro już tak dobrze znamy kształty i usytuowanie orbit, warto wspomnieć o pewnych poważnych kłopotach Kopernika i jego wątpliwościach co do własnej idei ruchu planet wokół Słońca.

Patrząc na równanie elipsy widzimy, że stosunek małej do dużej półosi wynosi $\sqrt{1-\epsilon^2}$, podczas gdy odległość Słońca od środka elipsy (położonego w punkcie $x = -\epsilon a$) w stosunku do dużej półosi jest mniejsza dokładnie o czynnik ϵ. Jakie są tego praktyczne konsekwencje, gdy ϵ jest niewielką liczbą, powiedzmy 0,01?

Przy takiej wartości[1] odległość Słońca od środka elipsy to 1% jego średniej odległości, lub inaczej stosunek odległości najmniejszej do największej ma się jak 99/101=0,98. Dokładność pozwalającą odkryć takie zmiany osiągnięto na długo przed Kopernikiem. A jaki liczbowo jest stosunek małej do dużej półosi przy tej wartości mimośrodu? Obliczmy: $\sqrt{1-1/100^2} = 0,99995$. To zgoła inna jakość! Takiej różnicy ówcześnie nie można było zauważyć. Innymi słowy, tor wygląda jak okrąg ze Słońcem WYRAŹNIE poza jego środkiem! Gdyby naprawdę tory były ściśle kołowe, ze Słońcem poza środkiem, byłaby to najprzedziwniejsza zagadka, przecząca jakiemukolwiek poczuciu ładu i symetrii. Śliczny okrąg dla planety, ale ze środkiem obok Słońca! Z bólem serca Kopernik musiał się pogodzić z takim (jak się wydawało) defektem swojej koncepcji. Jedyną pociechą było tylko to, iż mimo wszystko, przesunięcie było stosunkowo niewielkie.

Odkrycie, że tory są elipsami, zmienia sytuację radykalnie. Elipsa ma trzy wyróżnione punkty — środek i dwa ogniska. Właśnie w jednym z nich leży Słońce. Co więcej, prawa Newtona, przy sile nie

[1]Dla Ziemi mimośród orbity wynosi 0,016.

wyróżniającej w przestrzeni żadnego kierunku, poza kierunkiem do Słońca, tam właśnie każą mu być! Kopernik tego triumfu prostoty zasad mechaniki nieba i triumfu rozumu człowieka, któremu tę prostotę udało się dostrzec w nawałnicy bezpośrednich liczb opisujących żmudne, długotrwałe obserwację położeń ciał niebieskich, nie dożył, oczywiście, ale dla Newtona i wielu żyjących po nim pokoleń ludzi myślących, był to i jest trwały powód do satysfakcji.

Podobnie można analizować kształt toru gdy $\epsilon > 1$. Nazywa się on hiperbolą. Z przedstawienia orbity za pomocą azymutu widać, w szczególności, że dla kątów dla których $\cos\phi = -1/\epsilon$, istniejących wyłącznie dla $\epsilon \geq 1$, mianownik osiąga zero, a odległość r nieograniczenie wzrasta przy zbliżaniu się azymutu do tych wartości. Widać że orbita jest nieograniczona. Dla $\epsilon > 1$ istnieją dwa takie, symetrycznie położone kierunki. Wyznaczają one kierunki tzw. *asymptot* hiperboli. Po hiperbolach poruszają się przybysze z dalekiego Kosmosu — jednorazowe komety. Na długo przed zbliżeniem się do Słońca, i na długo potem, ich tory prawie nie różnią się od prostych — owych asymptot.