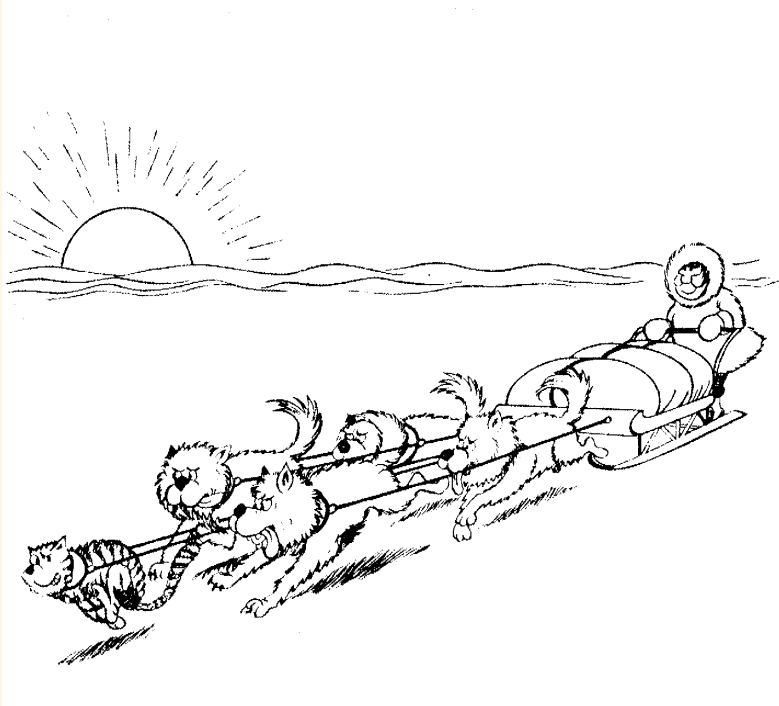


Opis ruchu



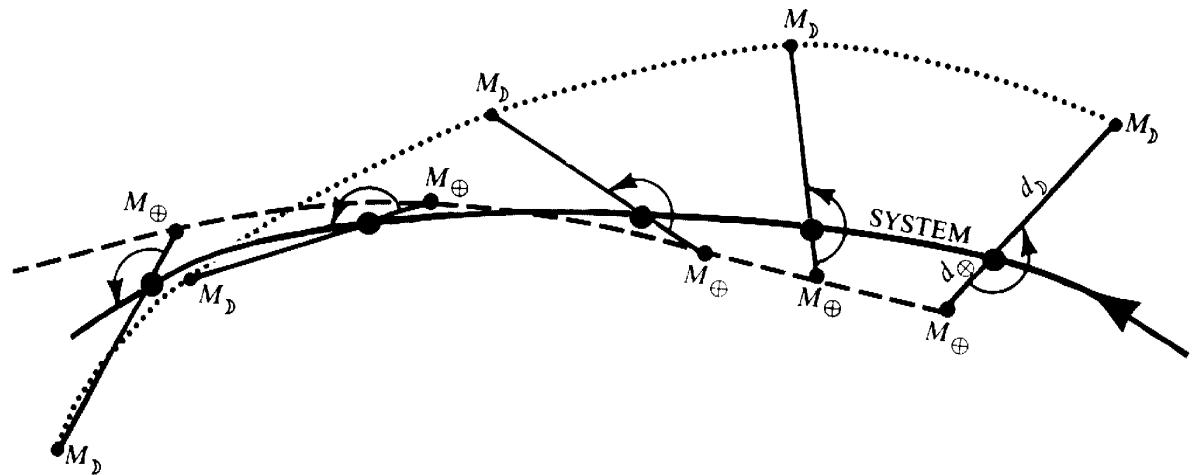
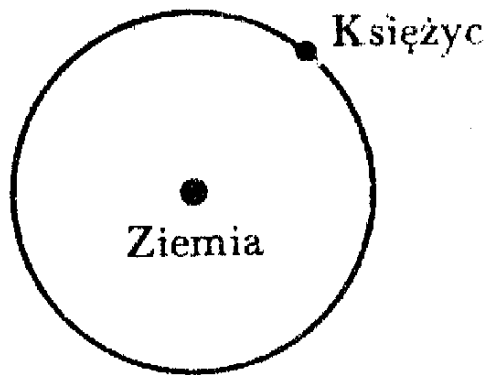
- Pojęcia podstawowe
- Położenie i tor
- Prędkość i przyspieszenie
- Przykłady ruchu
- Pomiary prędkości i przyspieszenia
- Prędkość światła
- Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Pojęcia podstawowe

Układ odniesienia - ciało materialne, względem którego odbywa się ruch.

Układ współrzędnych (np. kartezjański układ współrzędnych prostokątnych, układ współrzędnych biegunowych, ...) - twór matematyczny związany z jakimś układem odniesienia.

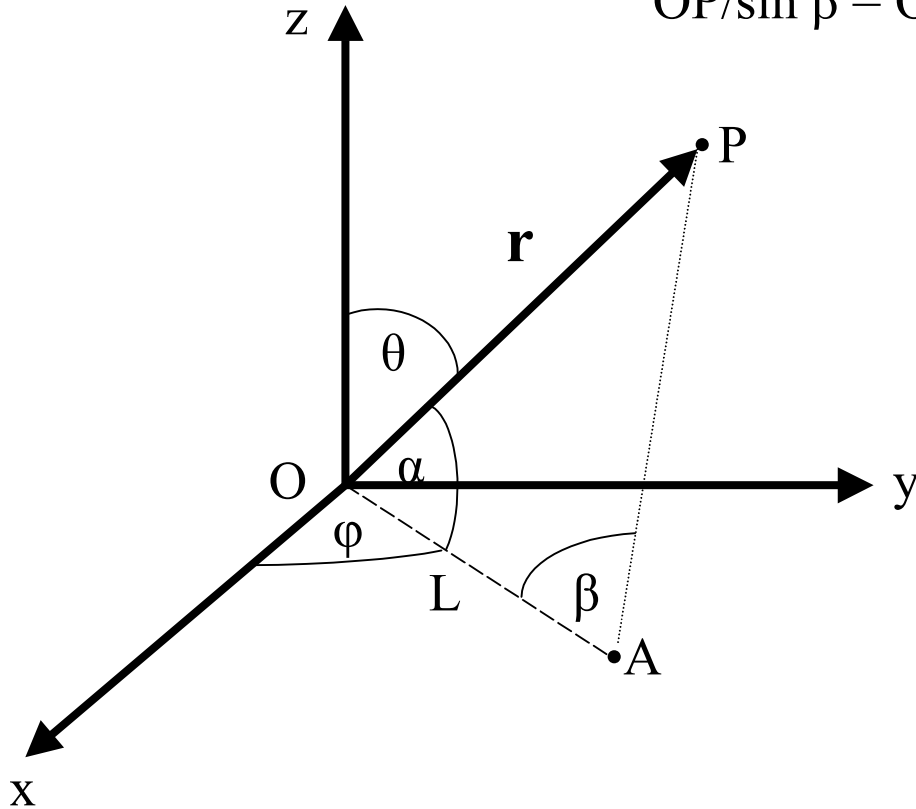
Punkt materialny - o rozmiarach znikających, ale obdarzony masą



Ruch Księżyca w układzie związanym z Ziemią
i ruch układu Ziemia-Księżyc w układzie związanym ze Słońcem

Położenie i tor

$$OP/\sin \beta = OA/\sin(\pi - \alpha - \beta)$$



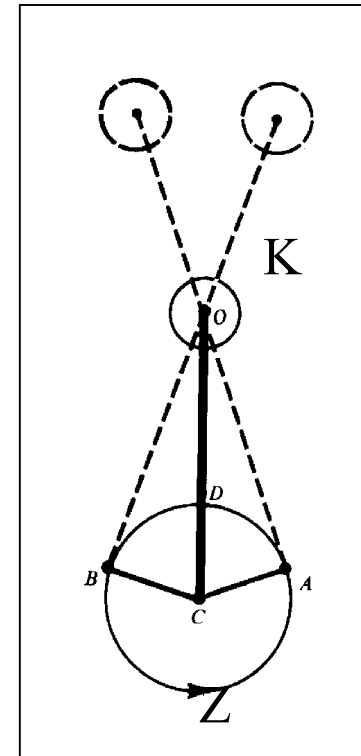
$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} =$$

$$= x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$OP = r = c (t_2 - t_1)/2$$

świat radarowy: położenie P odnoszone do czasu $t = (t_1 + t_2)/2$

świat słoneczny: położenie P odnoszone do czasu t (chwili obserwacji)
(świat „widziany” w świetle odbitym)

Położenie i tor

wyniki pomiarów

$$x_1 \pm \Delta x_1$$

$$t_1 \pm \Delta t_1$$

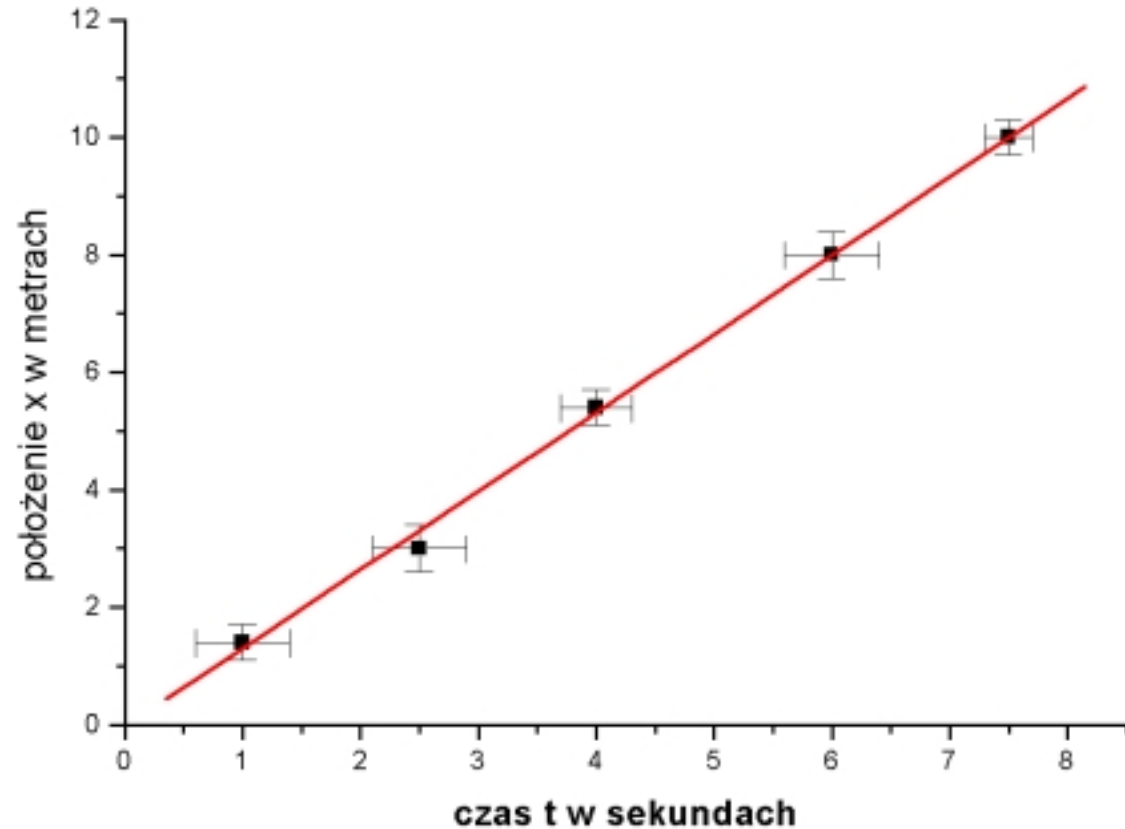
$$x_2 \pm \Delta x_2$$

$$t_2 \pm \Delta t_2$$

$$x_3 \pm \Delta x_3$$

$$t_3 \pm \Delta t_3$$

itd



Ekstrapolacja wyników wymaga wprowadzenia opisowego modelu matematycznego

$$x = x(t)$$

Położenie i tor

W ogólnym przypadku $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

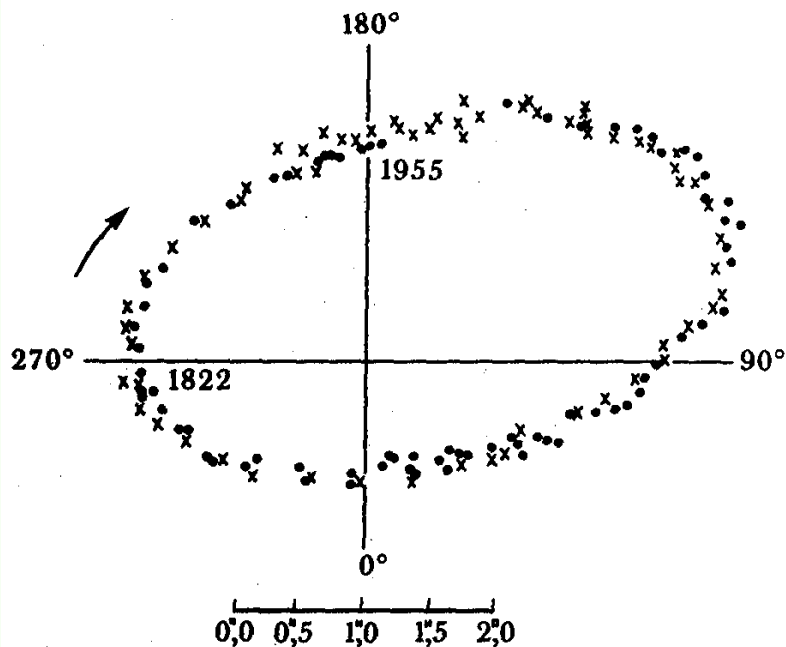
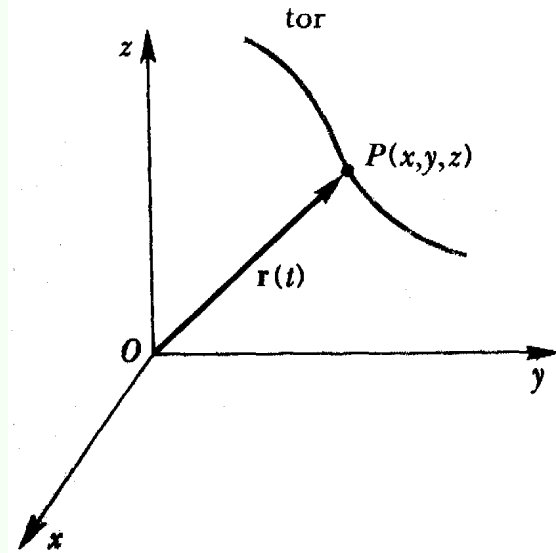
$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

równania
parametryczne toru

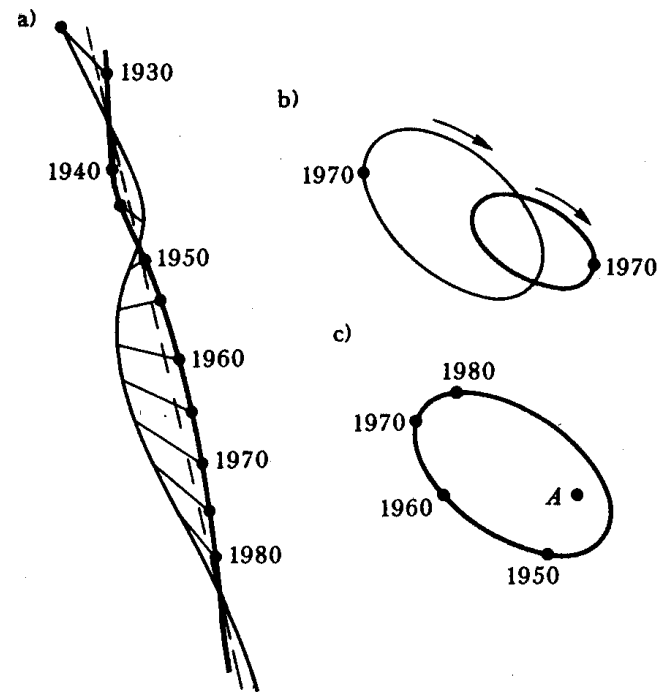
po eliminacji czasu t :

$y = F_1(x), z = F_2(x)$

równanie toru
w postaci uwikłanej



Pomiary gwiazdy podwójnej ξ Uma



Pomiary układu podwójnego Syriusza

Prędkość i przyspieszenie

$$\begin{array}{ll} t & \mathbf{r} \\ t + \Delta t & \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \end{array}$$

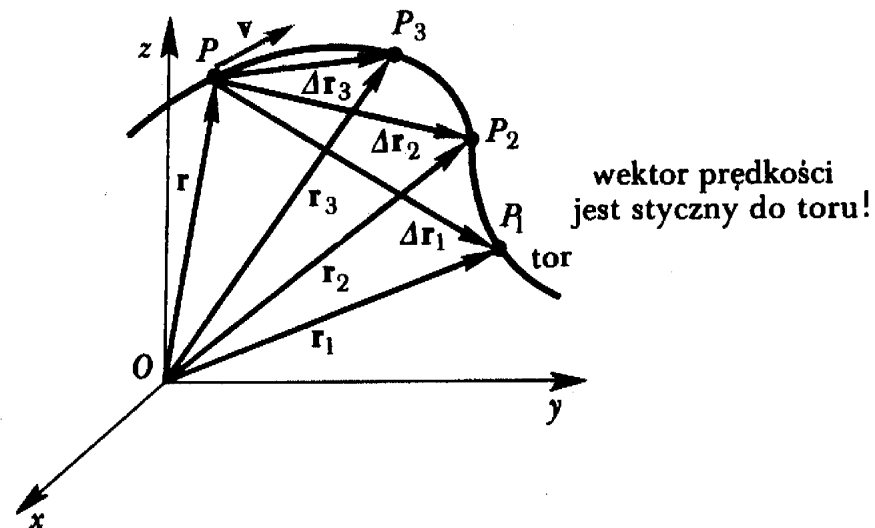
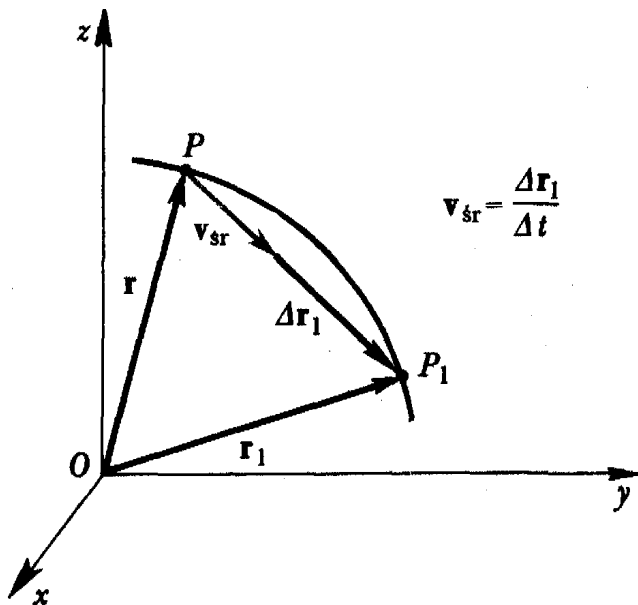
$$\mathbf{v}_{\text{sr}} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$$

prędkość średnia w odstępie czasu Δt

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t = d\mathbf{r} / dt$$

prędkość (chwilowa)

$$\mathbf{v} = (dx/dt)\mathbf{i}_x + (dy/dt)\mathbf{i}_y + (dz/dt)\mathbf{i}_z = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z$$

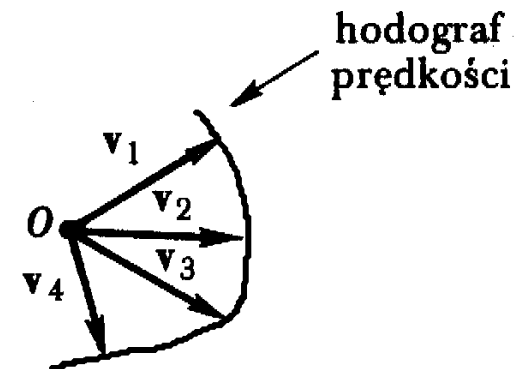
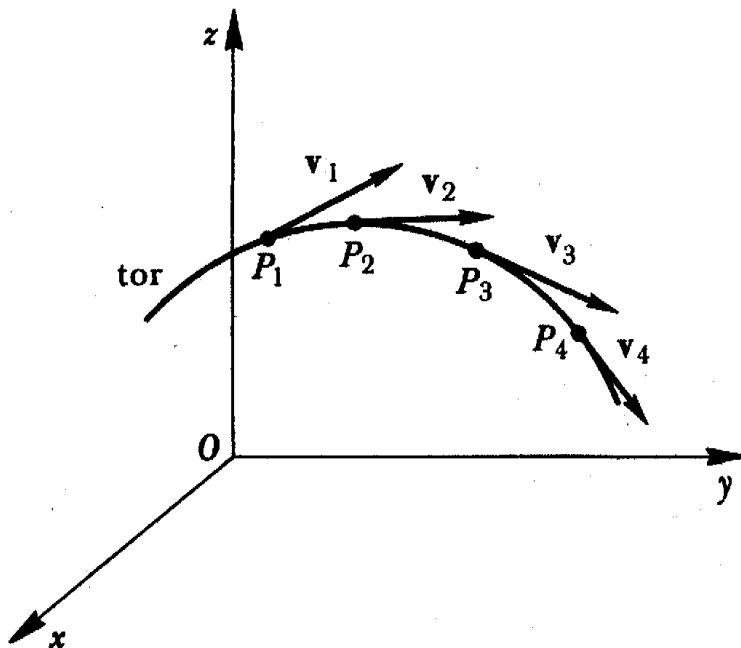


Prędkość i przyspieszenie

t_1	\mathbf{v}_1	$\mathbf{a}_{\text{sr}} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$
t_2	$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v}$	przyspieszenie średnie

$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\mathbf{v}/\Delta t = d\mathbf{v}/dt$ przyspieszenie

$[\mathbf{v}] = \text{m s}^{-1}$ $[\mathbf{a}] = \text{m s}^{-2}$



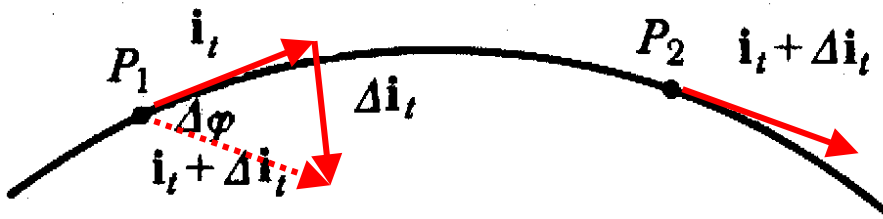
Przyspieszenie to prędkość punktu na hodografie prędkości

Przyspieszenie

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d(\mathbf{i}_t \mathbf{v})/dt = (d\mathbf{i}_t/dt)\mathbf{v} + \mathbf{i}_t (d\mathbf{v}/dt) = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

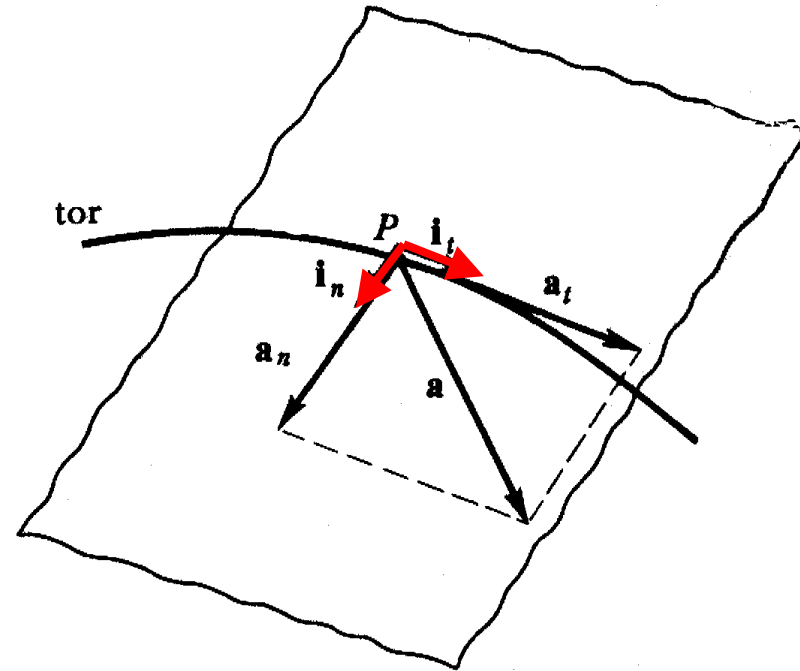
przyspieszenie normalne przyspieszenie styczne

Przyspieszenie normalne \mathbf{a}_n leży w płaszczyźnie ściśle stycznej



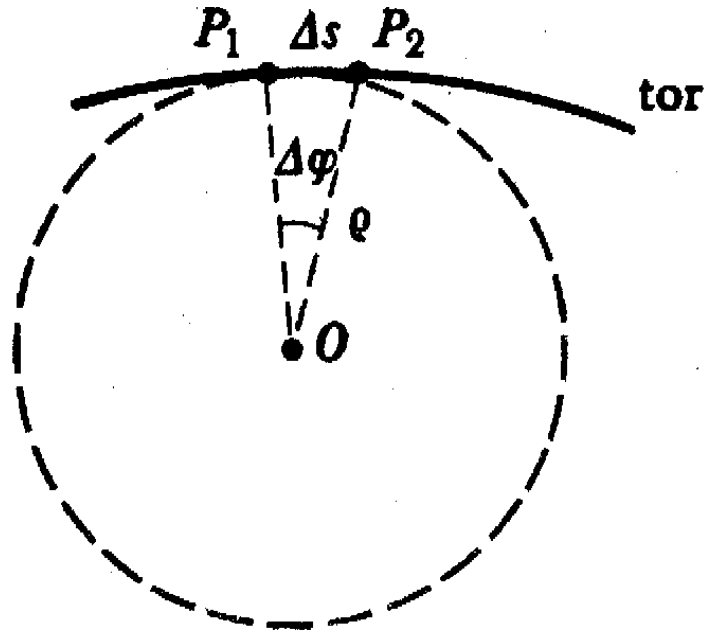
$$|\Delta \mathbf{i}_t| = 2 |\mathbf{i}_t| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx \Delta \varphi$$

Odcinek toru między P_1 i P_2 może nie leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory \mathbf{i}_t oraz $\mathbf{i}_t + \Delta \mathbf{i}_t$. Płaszczyzna ta dąży do płaszczyzny ściśle stycznej do toru w punkcie P_1 , gdy $P_2 \rightarrow P_1$.



płaszczyzna ściśle styczna
do toru w punkcie P

Przyspieszenie



$$\begin{aligned} d\mathbf{i}_t/dt &= (d\mathbf{i}_t/ds)(ds/dt) = \\ &= (\mathbf{i}_n d\phi/ds) v \end{aligned}$$

$$d\phi/ds = 1/\rho$$

promień krzywizny toru

$$a = \sqrt{(a_t^2 + a_n^2)} = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^2/\rho)^2}$$

Ruch prostoliniowy

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt$$

$$\int_{x_0}^x a dx = \int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2)$$

Ruch jednostajnie przyspieszony: $a = \text{const}$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

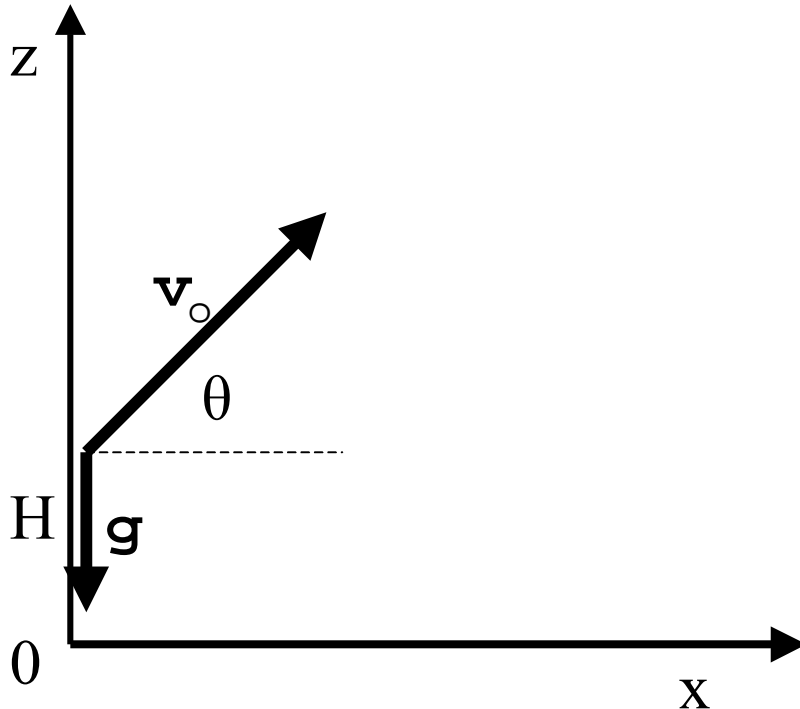
Ruch ze stałym przyspieszeniem

$$\mathbf{a} = \text{const}, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt, \quad d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{a}(t - t_0)^2/2$$

wektor \mathbf{v} leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory \mathbf{v}_0 i \mathbf{a}
wektor \mathbf{r} leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny $(\mathbf{v}_0, \mathbf{a})$
przechodzącej przez punkt zdefiniowany przez \mathbf{r}_0

Zatem ruch jest płaski, a torem ruchu jest parabola



szczególny przypadek: ruch
w pobliżu powierzchni ziemi

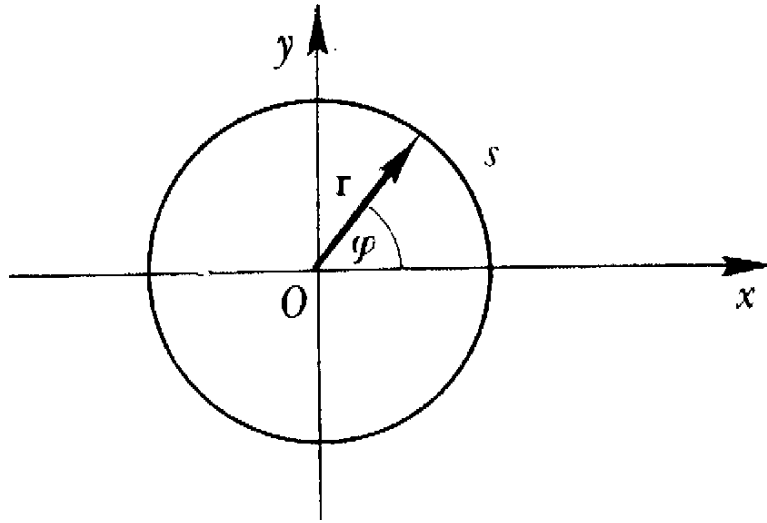
$H = 0, \theta = \pi/2$ rzut pionowy

$v_0 = 0, \theta = 3\pi/2$ spadek swobodny

$\theta = 0$ rzut poziomy ($v_0 \neq 0$)

$H = 0, v_0 \neq 0$ rzut ukośny

Ruch po okręgu

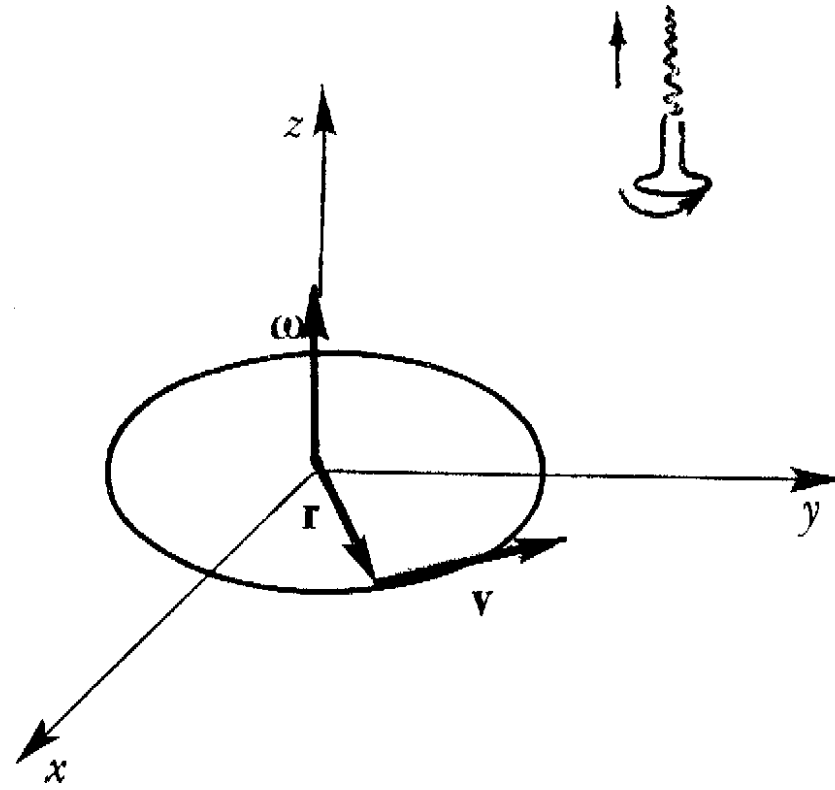


$$s = \varphi r \quad ds/dt = (d\varphi/dt) r = \omega r$$
$$v = \omega r \quad dv/dt = (d\omega/dt) r = \alpha r$$

ω - prędkość kątowa $[s^{-1}]$
 α - przyspieszenie kątowe $[s^{-2}]$

wektor $\boldsymbol{\omega}$ skierowany według reguły śruby prawoskrętnej

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



Przyspieszenie w ruchu po okręgu

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = (d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

$$a_t = (d\omega/dt) r = 0 \quad \text{gdy } \omega = \text{const} \quad \text{ruch jednostajny po okręgu}$$

$$a_n = v^2/r \neq 0 \quad \text{zawsze} \quad \text{(przyspieszenie dośrodkowe)}$$

Z analizy wektorowej: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

$\stackrel{=}{\mathbf{0}}$

Ruch harmoniczny

Szczególny przykład ruchu drgającego, w którym zachodzi

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

amplituda częstość
kołowa faza
początkowa

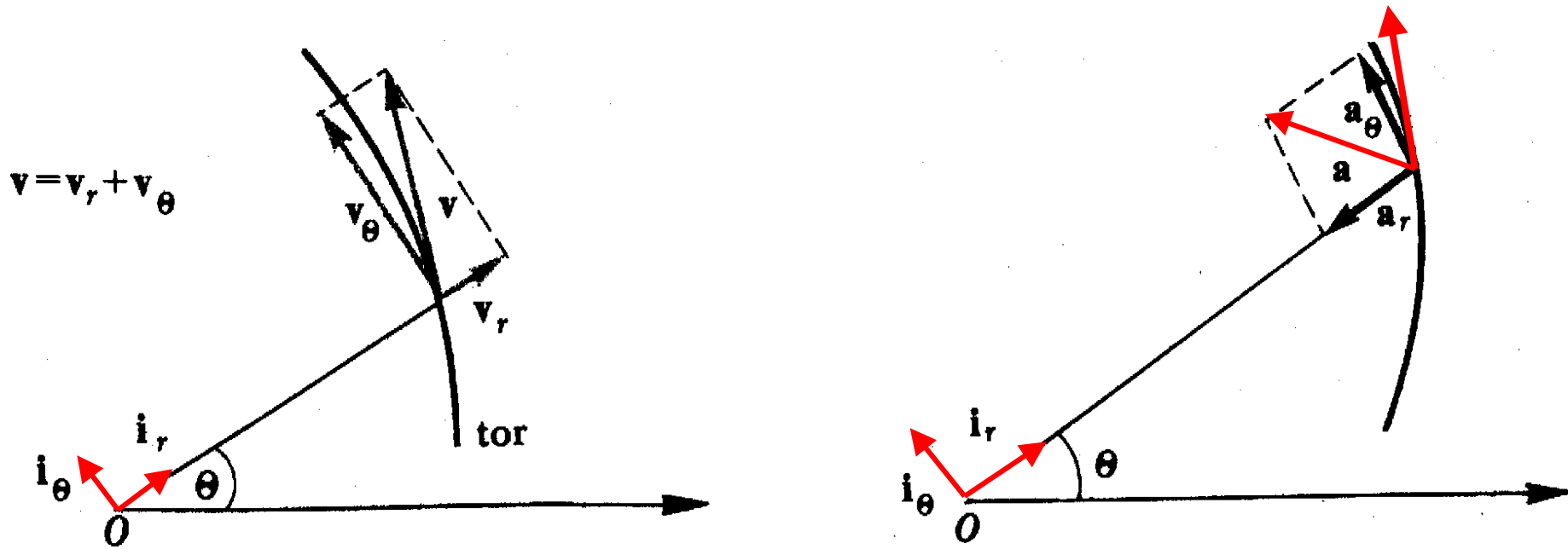
$a = d^2x/dt^2 = -\omega^2x$ przyspieszenie proporcjonalne do wychylenia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

równanie oscylatora
harmonicznego

Przykłady: wahadło sprężynowe, wahadło matematyczne dla małych wychyleń

Opis ruchu we współrzędnych biegunowych: $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$



$$\mathbf{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right) \mathbf{i}_r + r \left(\frac{d\mathbf{i}_r}{dt}\right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{dr}{dt}\right) = \mathbf{i}_\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right) r + \mathbf{i}_r \left(\frac{dr}{dt}\right)$$

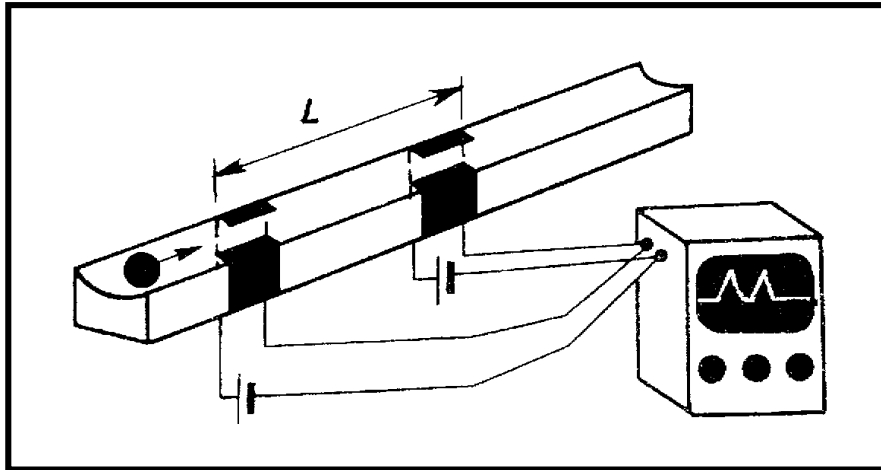
$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \mathbf{i}_\theta \left(\frac{dr}{dt}\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) r + r \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \left(\frac{d\mathbf{i}_\theta}{dt}\right) + \mathbf{i}_r \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\right) \left(\frac{d\mathbf{i}_r}{dt}\right) = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta$$

przyspieszenie radialne i **przyspieszenie transwersalne**

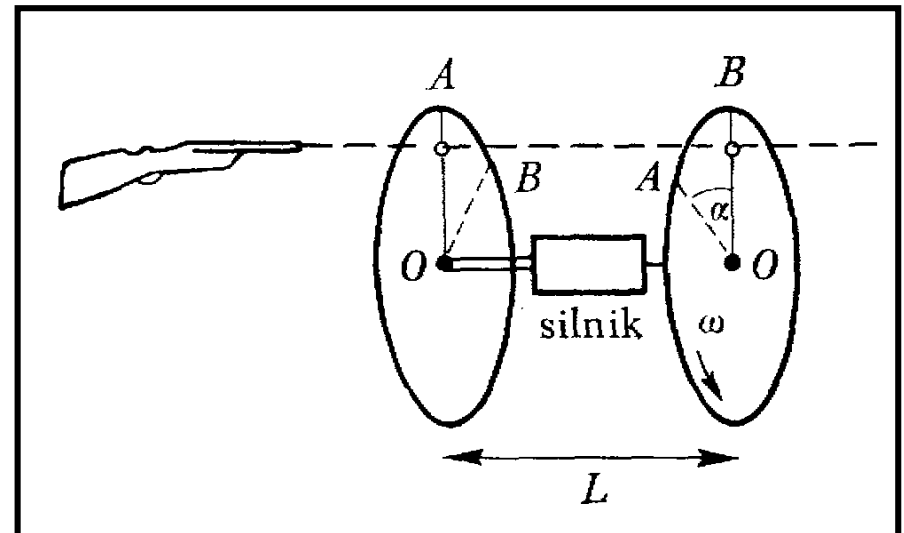
Pomiary prędkości i przyspieszenia

Pomiar prędkości polega w zasadzie na pomiarze długości i czasu

Metody specjalne: 1. Metoda czasu przelotu



Na tej zasadzie oparte są selektory prędkości



2. Wykorzystanie zjawiska Dopplera

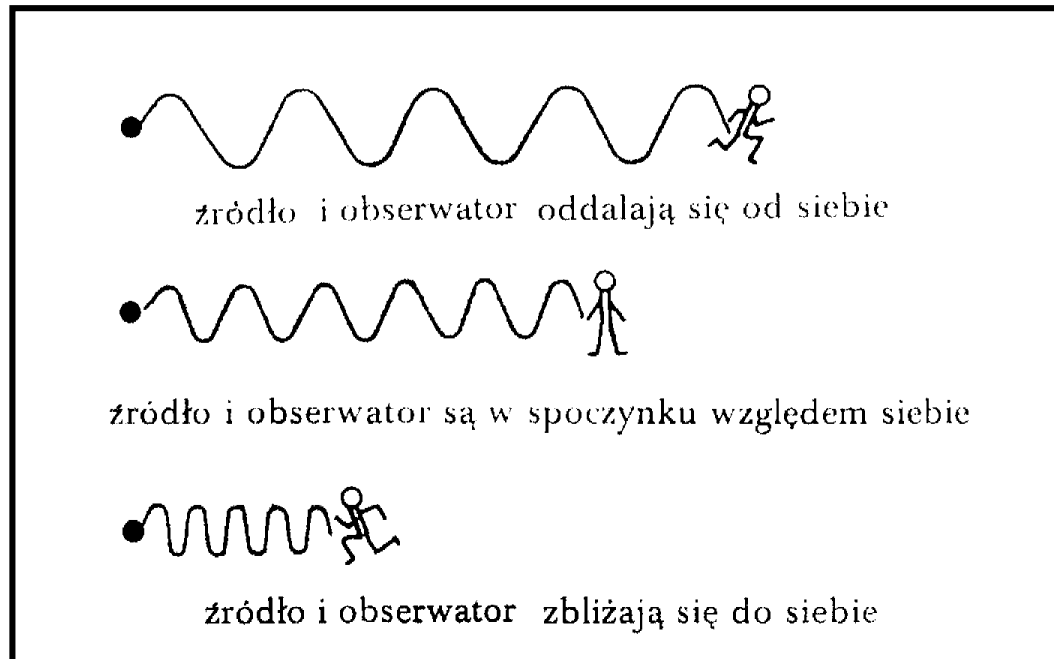
Dla prędkości względnej obserwatora i źródła v małej w porównaniu z prędkością fal v_f , częstość odbierana przez obserwatora wynosi

znak + zbliżanie się

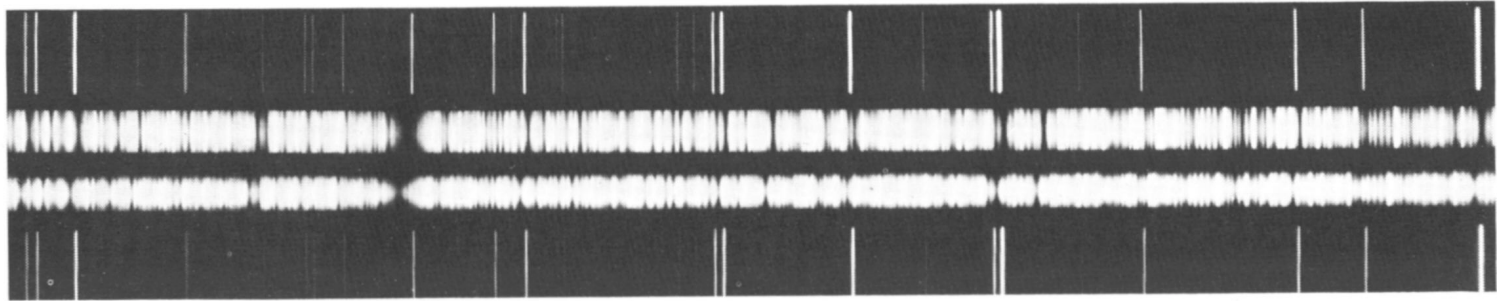
znak – oddalanie się

obserwatora i źródła

$$v' \approx v \left(1 \pm \frac{v}{v_f} \right)$$



Wskutek zjawiska Dopplera następuje przesunięcie położenia linii widmowych w widmach obiektów astronomicznych



Spectra ($\lambda 4200\text{\AA}$ to $\lambda 4300\text{\AA}$) of the constant velocity star Arcturus taken about six months apart.

(a) 1939 July 1 Measured velocity +18km/sec

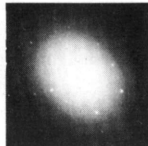
(b) 1940 Jan. 19 " " -32km/sec

The velocity difference of 50km/sec is entirely due to the orbital velocity of the earth.

CLUSTER
NEBULA IN

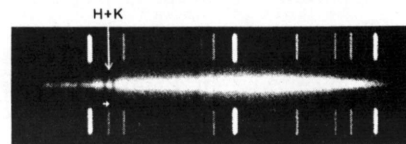
DISTANCE IN
LIGHT-YEARS

RED-SHIFTS



VIRGO

7,500,000

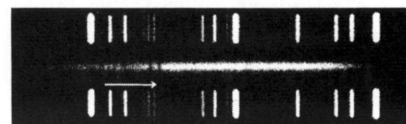


750 MILES PER SECOND



URSA MAJOR

100,000,000

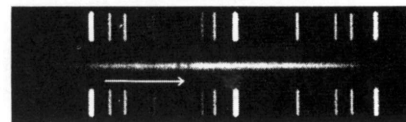


9,300 MILES PER SECOND

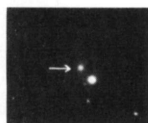


CORONA BOREALIS

130,000,000

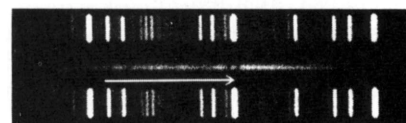


13,400 MILES PER SECOND

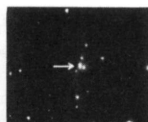


BOOTES

230,000,000

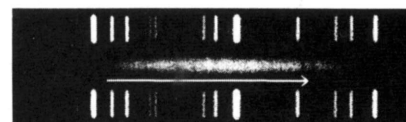


24,400 MILES PER SECOND



HYDRA

350,000,000



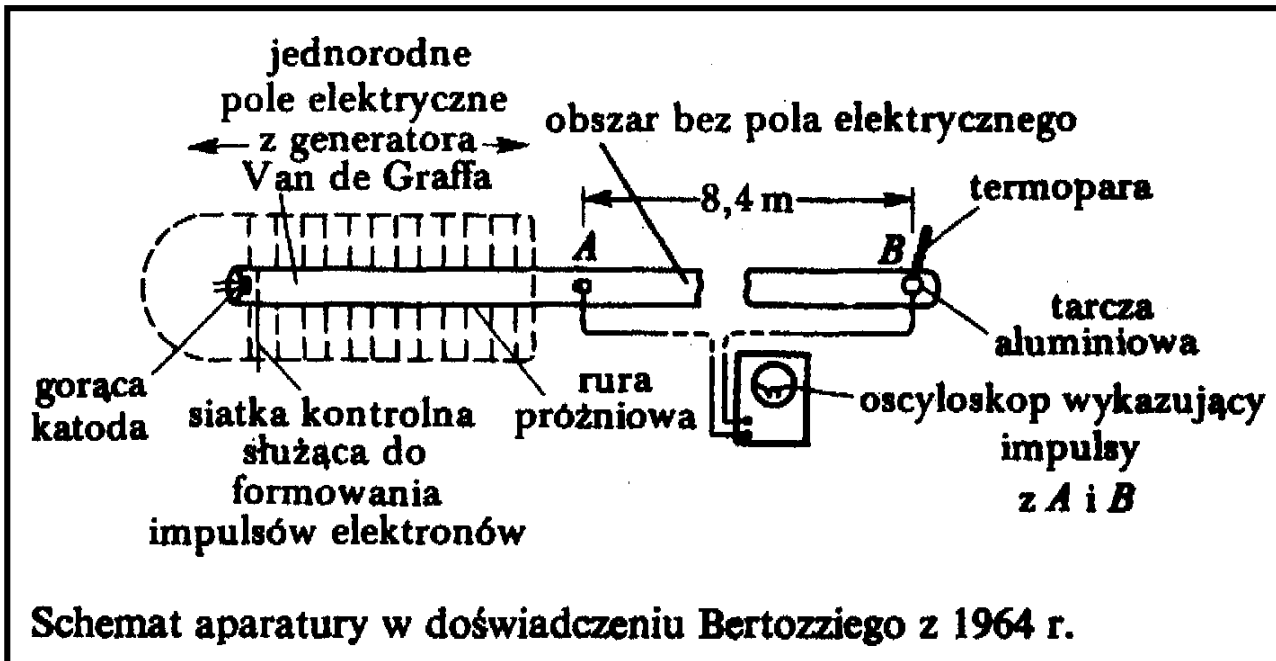
38,000 MILES PER SECOND

Prędkość graniczna

W ruchu po prostej nie mamy formalnie żadnego ograniczenia na wartość prędkości nabywanej przez przyspieszane ciało, ale z doświadczenia wynika

$$v = \int a dt < c$$

$$v = \int_0^v dv = \int_0^t a dt$$



1. Pomiar prędkości metodą czasu przelotu
2. Pomiar energii elektronów metodą „kalorymetryczną” oraz na podstawie różnicy potencjałów

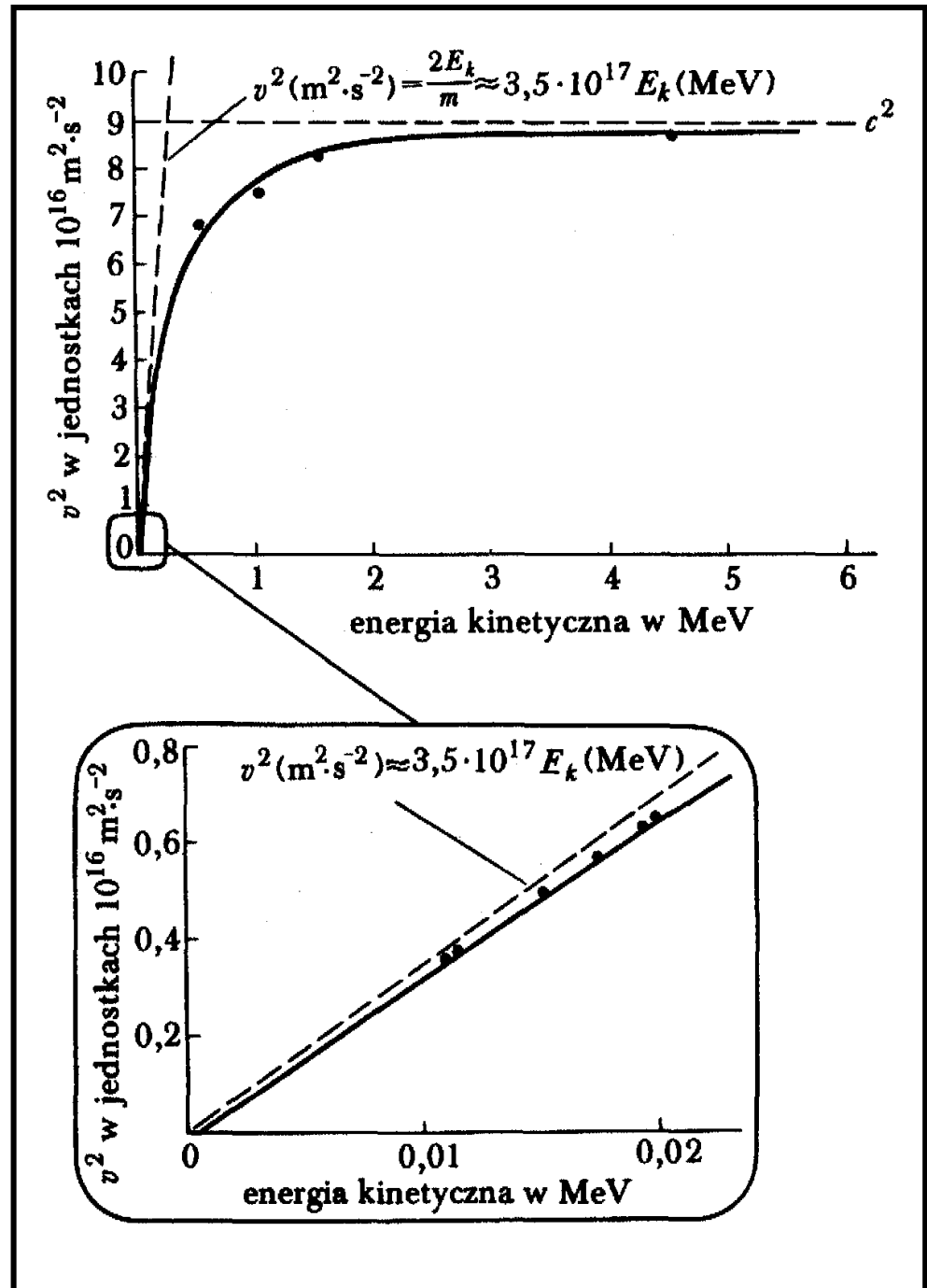
$$E_k = eU = mv^2/2$$

↑

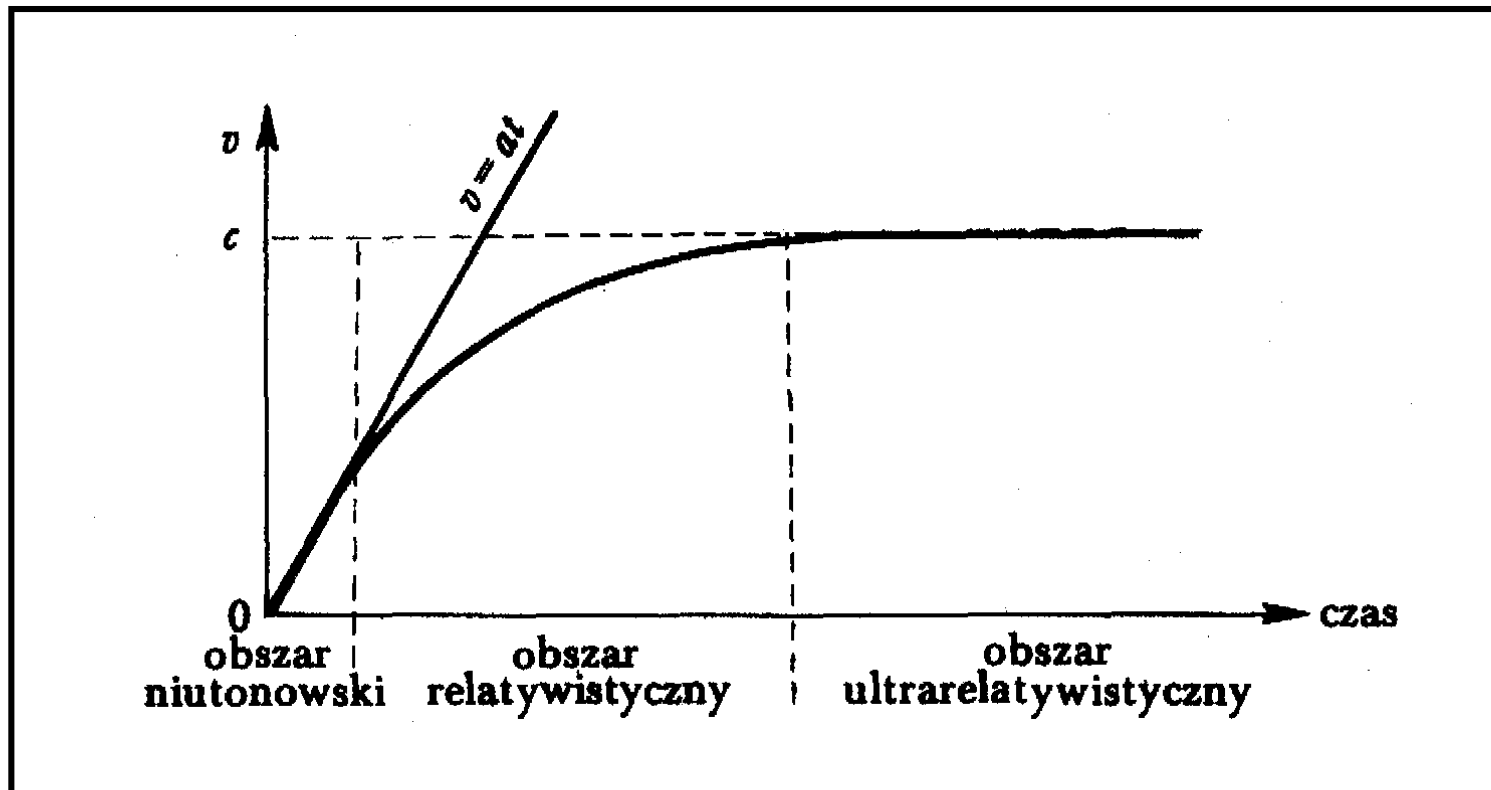
(klasycznie $m = \text{const}$)

$$\text{stąd } v^2 = 2E_k/m$$

(sprzeczne z doświadczeniem)



[C.T.Perry i E.L.Chaffee (1930)]



Cząstki poruszające się zawsze z prędkością światła muszą mieć masę spoczynkową $m_0 = 0$ (fotony) [luxony]

Cząstki „normalne”, zawsze $v < c$ [tardiony]

Czy istnieją cząstki, dla których zawsze $v > c$? [tachiony]

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0c^2$$

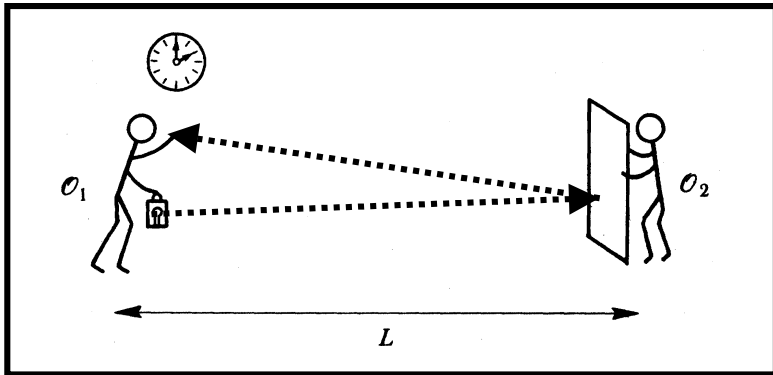
czyli
$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left[\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + E_k} \right]^2$$

[Elektrony: $m_0c^2 = 0,510998... \text{ MeV}$]

E_k	β^2	klasycznie (v^2/c^2) = $2E_k/m_0c^2$
1 keV	0,0039	0,003914
1 MeV	0,8856	3,9139
1 GeV	0,9999997	3913,87
10 GeV	0,9999999974	39138,68

Pomiary: 11 GeV $1 - \beta = (-1,3 \pm 2,7) 10^{-6}$
 15 GeV $1 - \beta \leq 2 \cdot 10^{-7}$

Prędkość światła



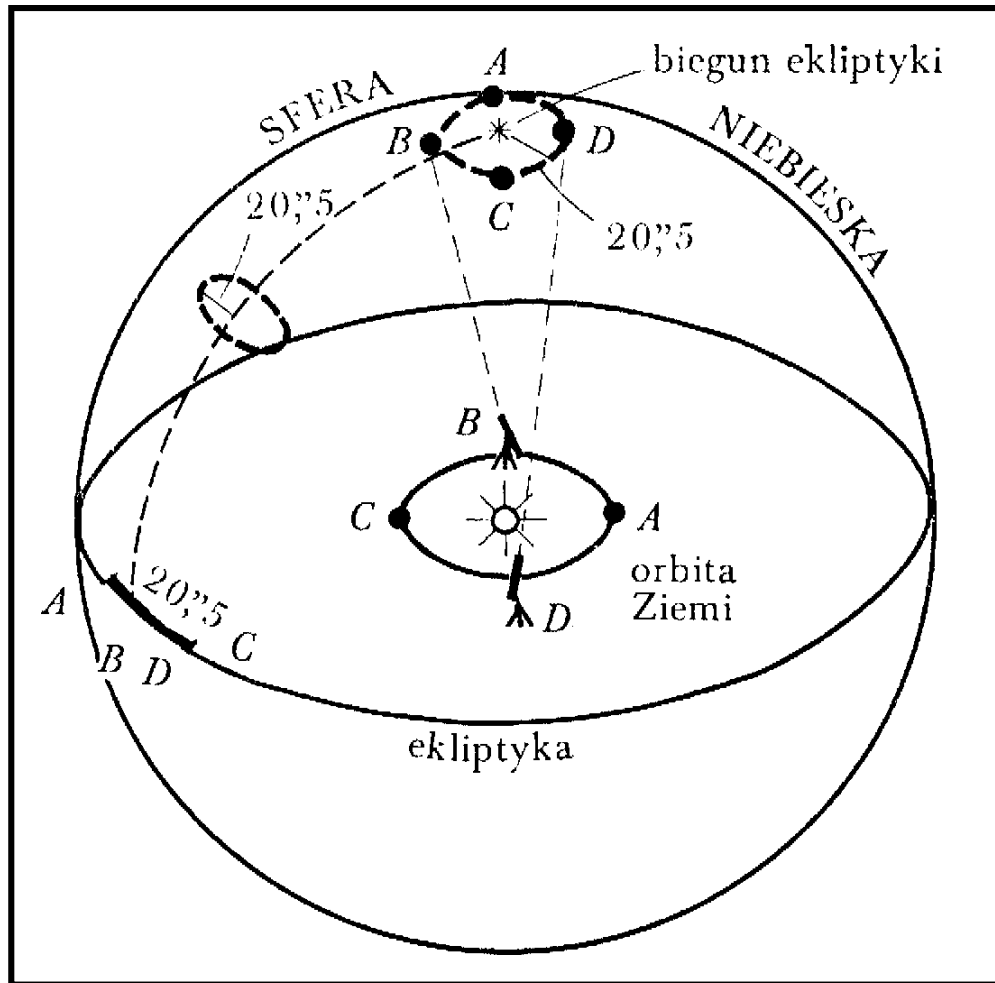
Pierwszą propozycję pomiaru podał Galileusz. Wszystkie późniejsze pomiary są w pewnym sensie modyfikacją metody Galileusza

Przykładowe wyniki pomiarów

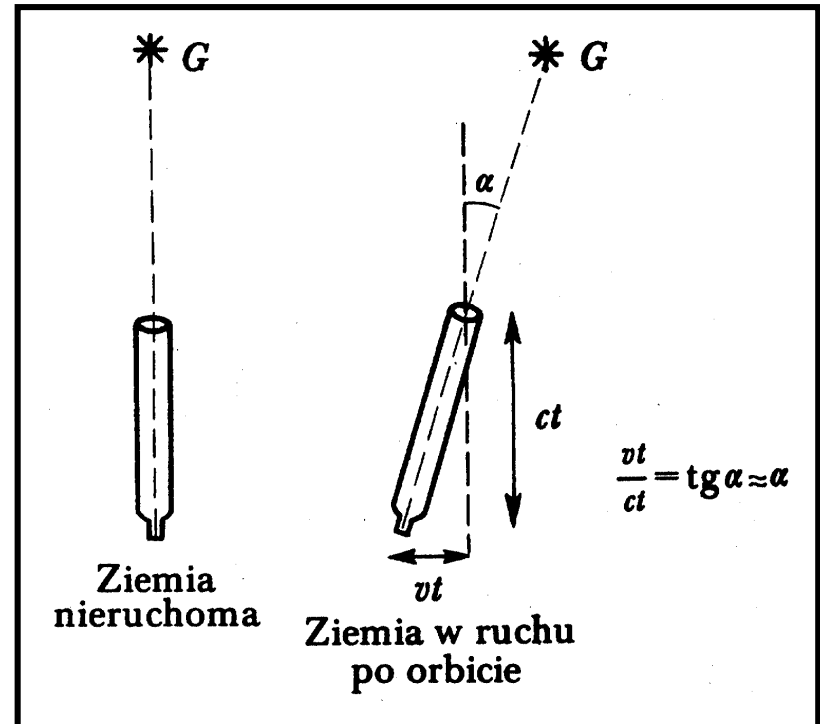
	Częstość (Hz)	c (km/s)	
fotony γ	$1,5 \cdot 10^{24}$	299790	± 40
widzialne	$5,4 \cdot 10^{14}$	299792,4562	$\pm 0,0011$
podczerwień	$2,5 \cdot 10^{12}$	299792,2	$\pm 0,6$
mikrofale	10^{10}	299792,5	± 1
radar	$3 \cdot 10^8$	299794,2	$\pm 1,9$
radio	$7,5 \cdot 10^7$	299795	± 30

[wniosek z obserwacji gwiazd rozbłyskowych: światło widzialne i fale radiowe dobiegają do Ziemi jednocześnie \Rightarrow prędkość jednakowa z dokładnością 10^{-7}]

Aberracja światła

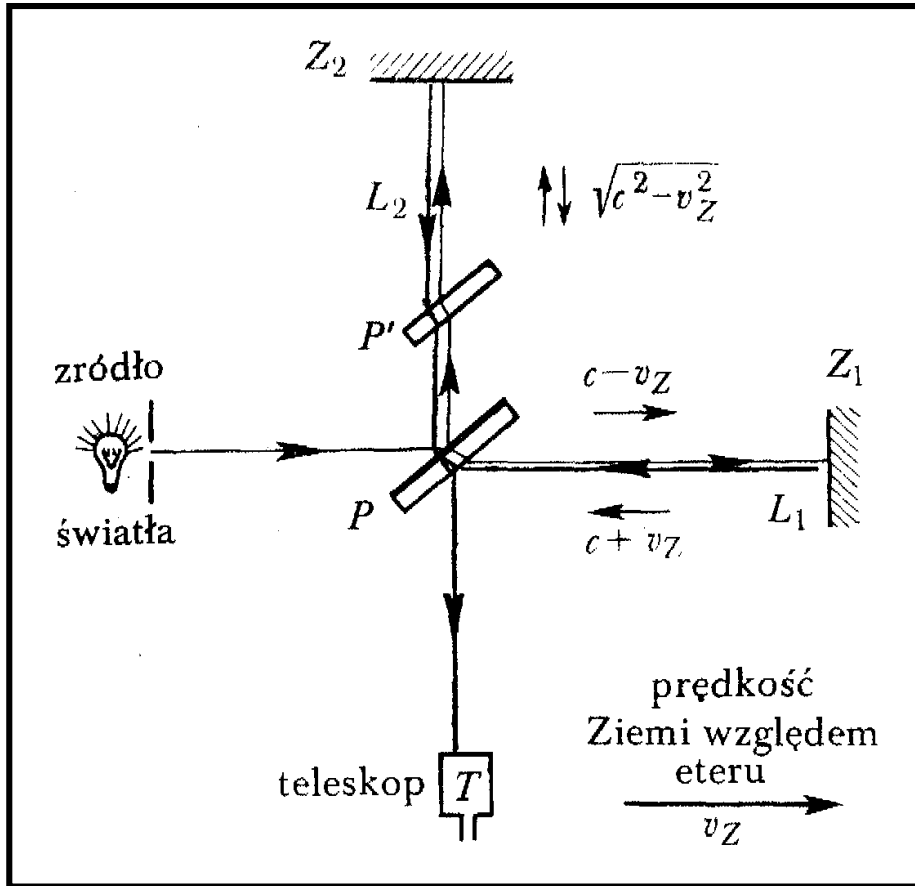


Odkrywca:
William Bradley (1727)



Stała aberracji = 20,4958 sekund kątowych = 0,000 009 936 644 radiana

Doświadczenie Michelsona-Morleya (1887)



Promień PZ_1P

$$t_1 = \frac{L_1}{c - v_Z} + \frac{L_1}{c + v_Z} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{2\gamma^2 L_1}{c}$$

Promień PZ_2P

$$t_2 = \frac{2L_2}{c\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2\gamma L_2}{c}$$

Różnica czasów

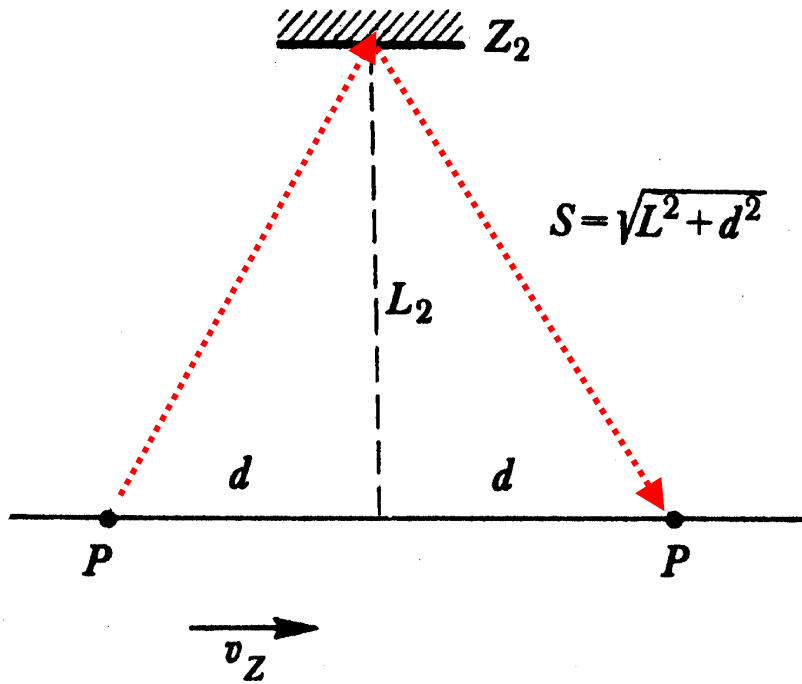
$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2\gamma(\gamma L_1 - L_2)/c$$

Po obrocie interferometru o 90° L_1 i L_2
zamieniają się miejscami

$$\Delta t' = 2\gamma(L_1 - \gamma L_2)/c$$

Interpretacja klasyczna: jeżeli Ziemia porusza się względem eteru, to obraz interferencyjny w polu widzenia ulega zmianie przy obrocie

Punkt widzenia obserwatora nieruchomego względem eteru



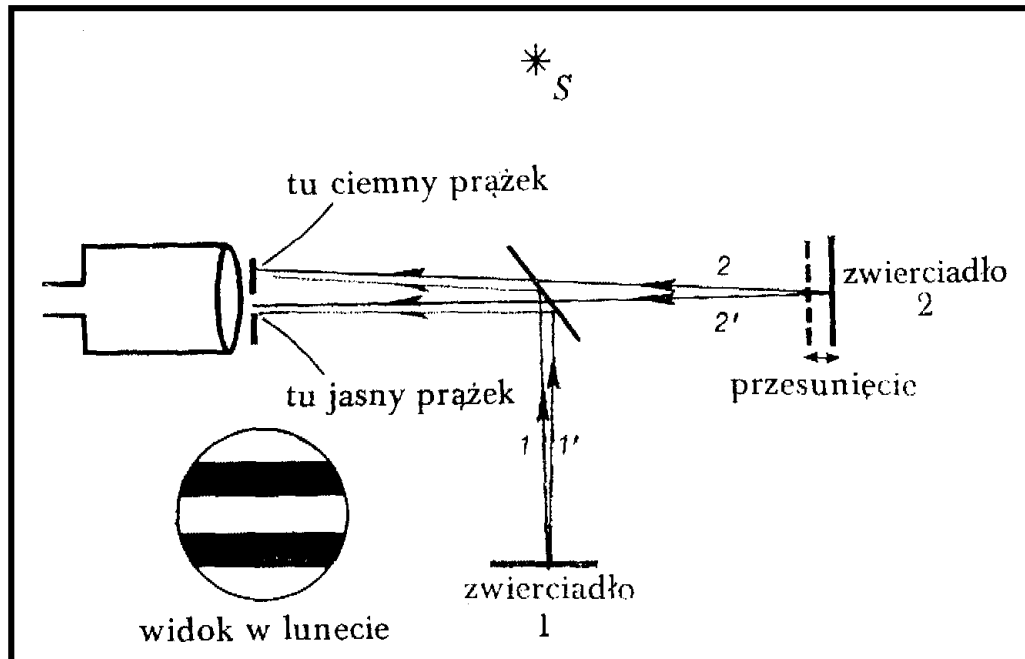
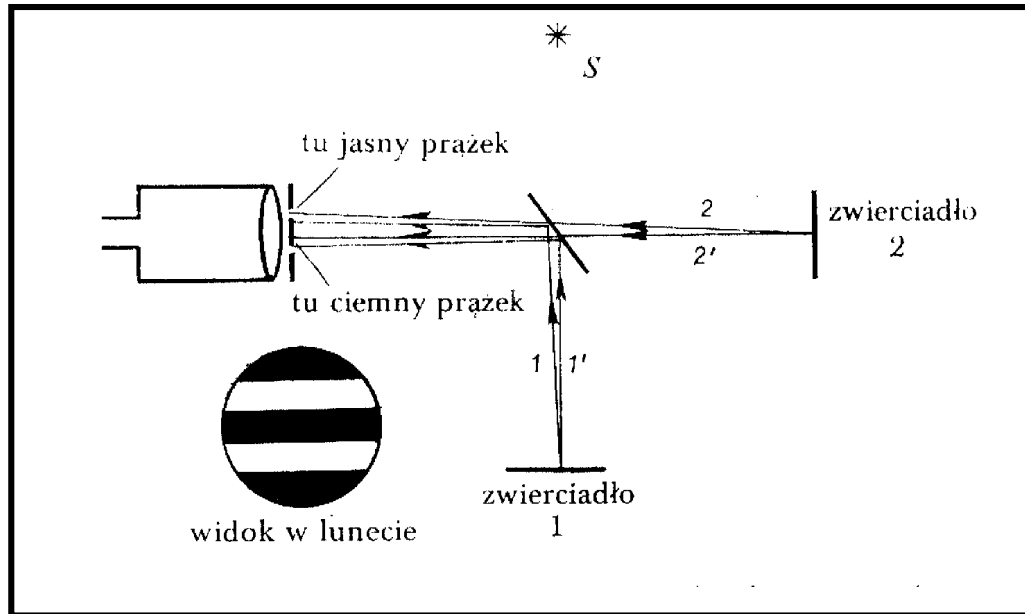
$$\beta = v_z/c = d/\sqrt{(d^2 + L_2^2)}$$

$$\text{czyli } d = \beta L_2 / \sqrt{(1 - \beta^2)} = \beta \gamma L_2$$

czas przebycia drogi PZ_2P

$$t_2 = 2 \sqrt{(d^2 + L_2^2)} / c = 2\gamma L_2 / c$$

Doświadczenie Michelsona-Morleya (1887)



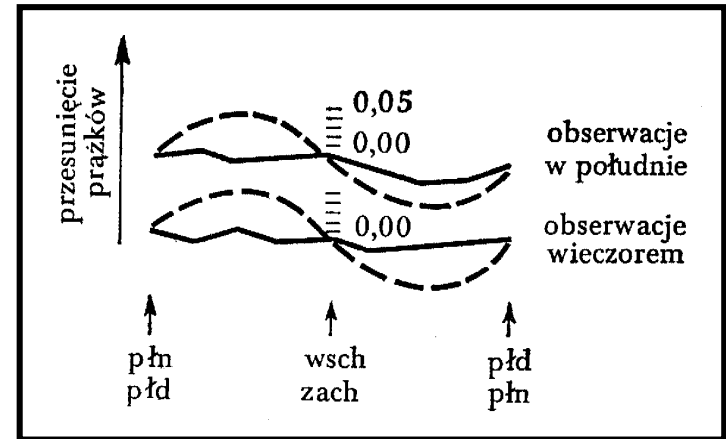
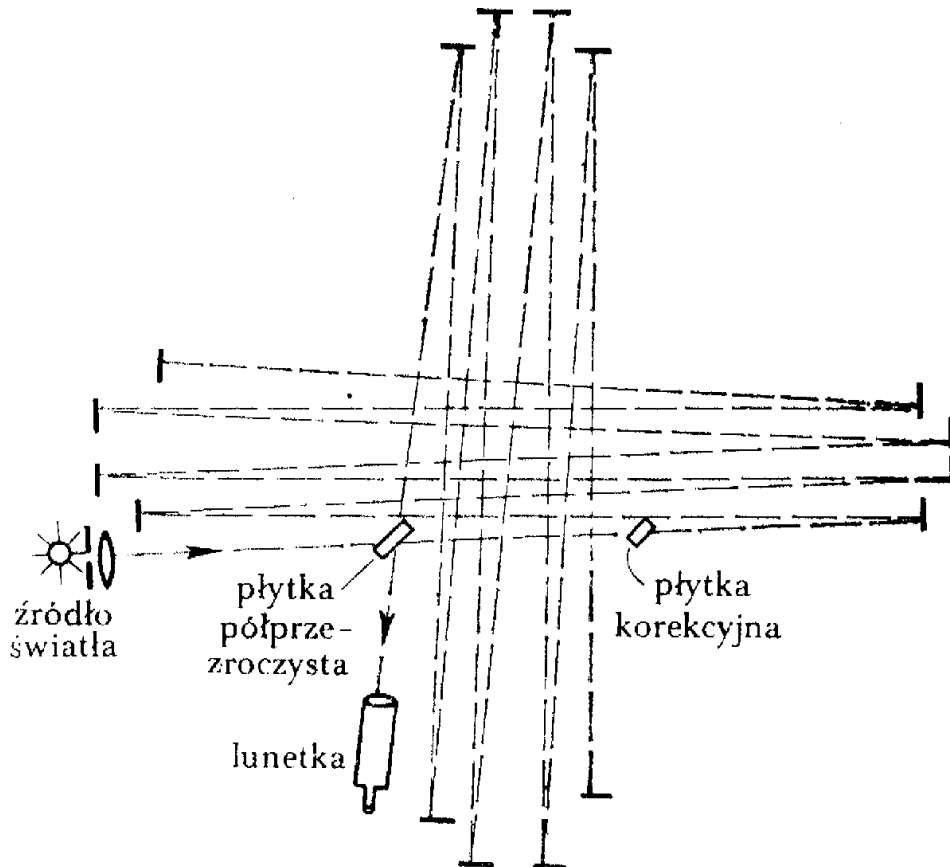
Interpretacja klasyczna:
Zmiana czasu przelotu światła
przy obrocie interferometru
powinna powodować
przesuwanie się prążków, tak
jak w wypadku przesuwania
się zwierciadła 2

Doświadczenie Michelsona-Morleya (1887)

$$\tau = \Delta t - \Delta t' \approx \beta^2(L_1 + L_2)/c$$

$$v_Z \approx 30 \text{ km/s} \Rightarrow \beta \approx 10^{-4}$$

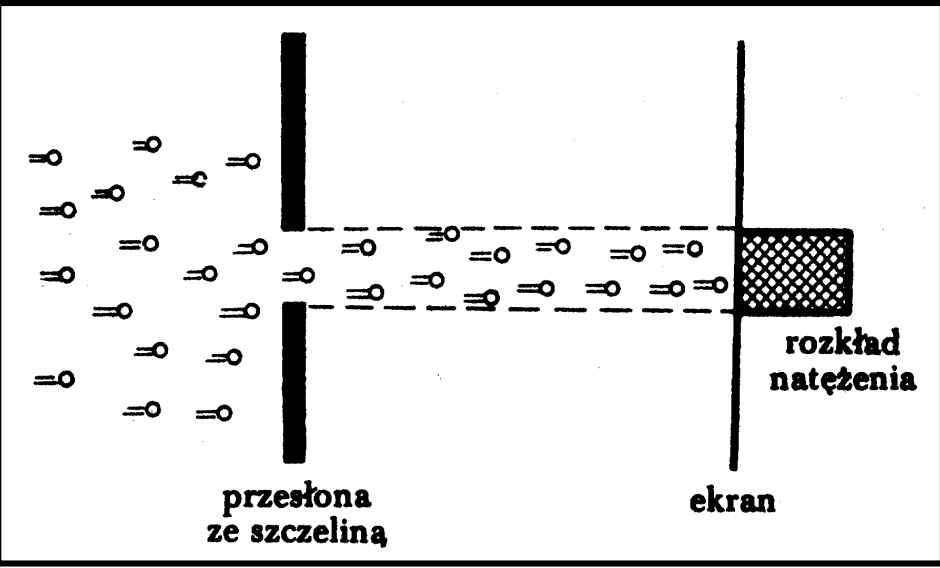
Oczekiwane przesunięcie o
 $k = c\tau/\lambda \approx \beta^2(L_1 + L_2)/\lambda$
prążków



- Ze wszystkich wykonanych pomiarów wynika, że prędkość światła w próżni nie zależy od częstości, ani od kierunku rozchodzenia się w przestrzeni.
- W 1905 roku Albert Einstein przyjął jako jeden z postulatów szczególnej teorii względności, że prędkość światła w próżni c jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia niezależnie od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła.
- W 1983 roku zdefiniowano prędkość światła w próżni jako

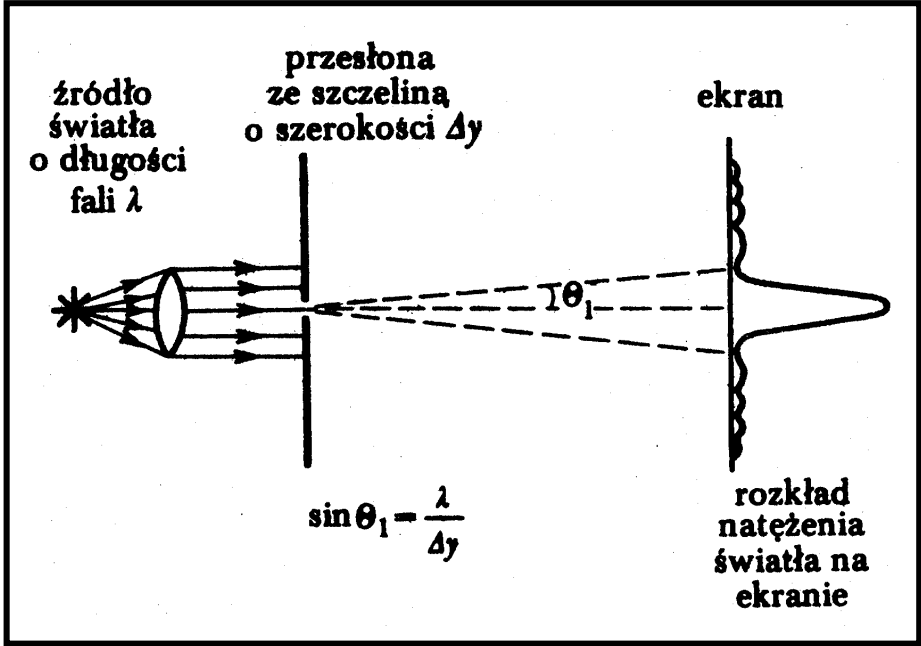
$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

i obecnie jednostka długości, metr, jest zdefiniowany jako odległość, którą światło w próżni przebiega w czasie $1/299792458$ sekundy



Gdyby fotony zachowywały się jak cząstki klasyczne, to po ich przejściu przez szczelinę rozkład natężenia światła na ekranie byłby prostokątny

W rzeczywistości światło ulega dyfrakcji; jest to szczególny przypadek działania zasady nieoznaczoności Heisenberga. Dyfrakcji ulegają także elektrony, atomy i inne cząstki i obiekty kwantowe



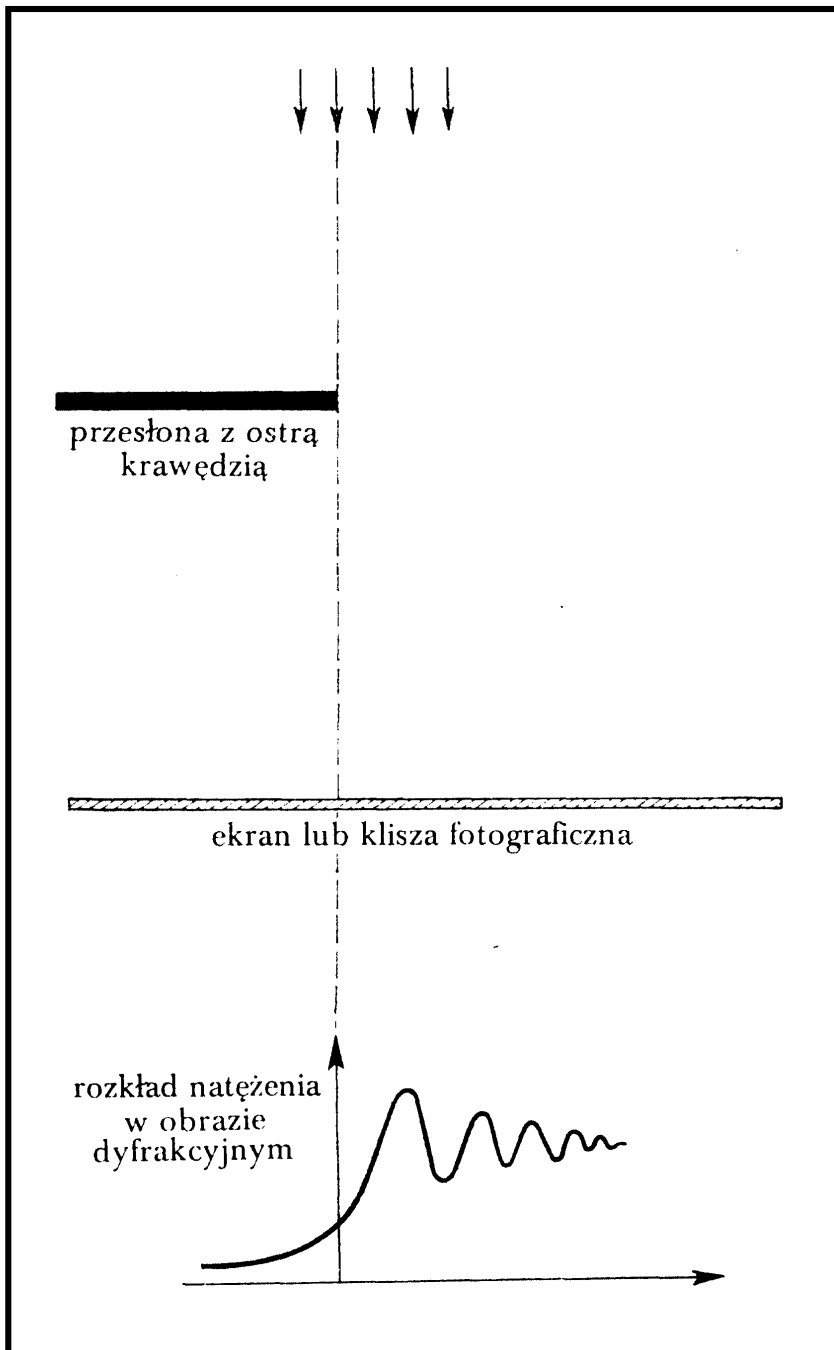
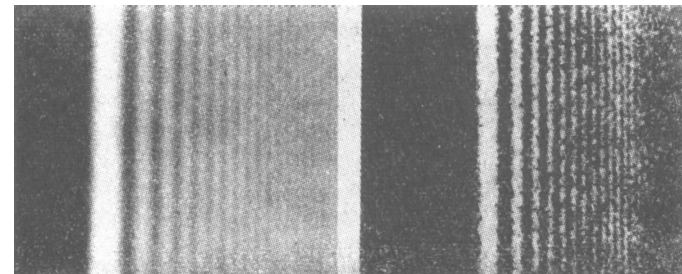
Elektrony wykazują właściwości falowe na przykład w zjawisku dyfrakcji

$$\lambda_B = h/p$$

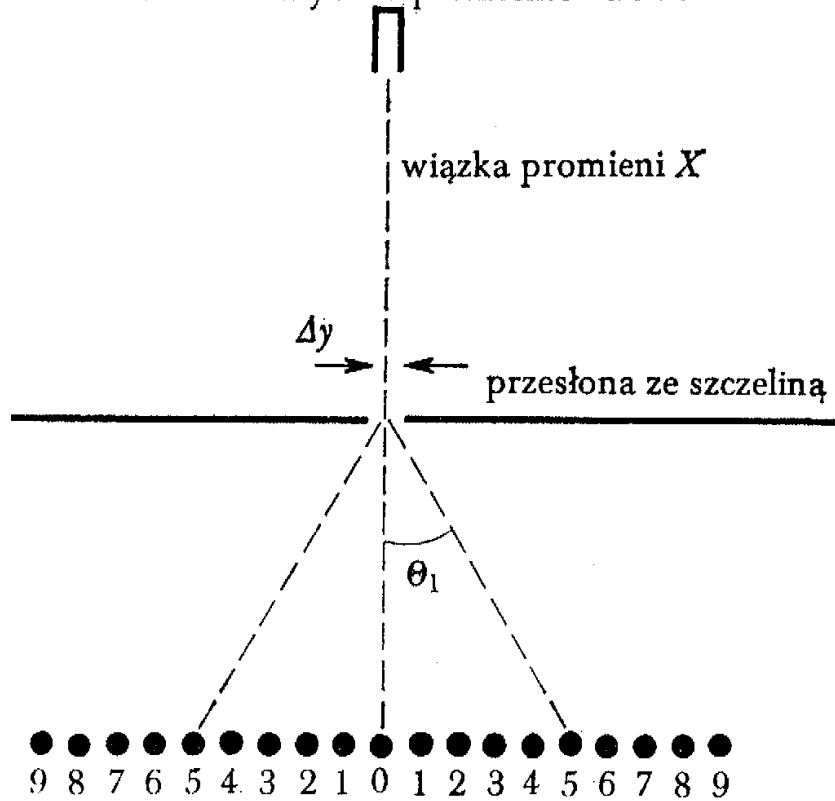
długość fali de Broglie'a

obraz
dyfrakcyjny
dla
światła

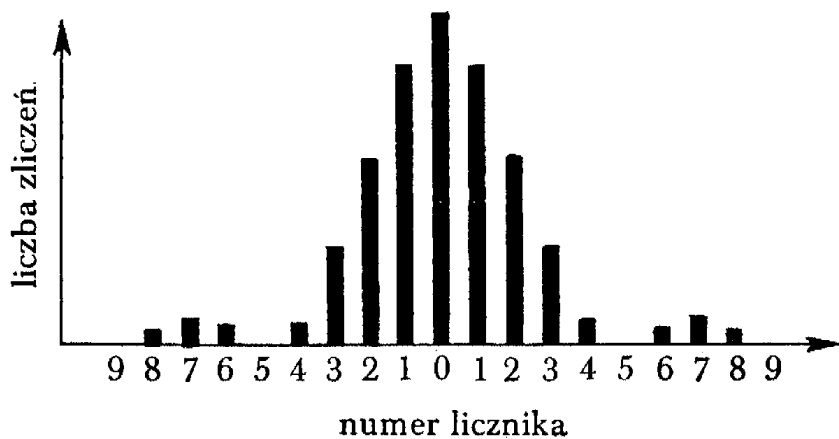
obraz
dyfrakcyjny
dla
elektronów



lampa rentgenowska wysyłająca
monochromatyczne promieniowanie X



liczniki Geigera-Müllera rejestrujące fotony X



Pęd fotonów przed szczeliną

$$p = p_x \text{ ponieważ } p_y = 0$$

Po przejściu przez szczelinę
maksymalna wartość składowej p_y
wynosi $\Delta p_y = p \sin\theta_1$ (ograniczamy
się do maksimum głównego)

$$\text{ale } \sin\theta_1 = \lambda_B / \Delta y$$

$$p = (h / \lambda_B)$$

$$\Delta p_y = p \sin\theta_1 = (h / \lambda_B) (\lambda_B / \Delta y) = h / \Delta y$$

$$\Delta p_y \Delta y \geq h$$

Zasada nieoznaczoności
[Werner Heisenberg (1927)]