

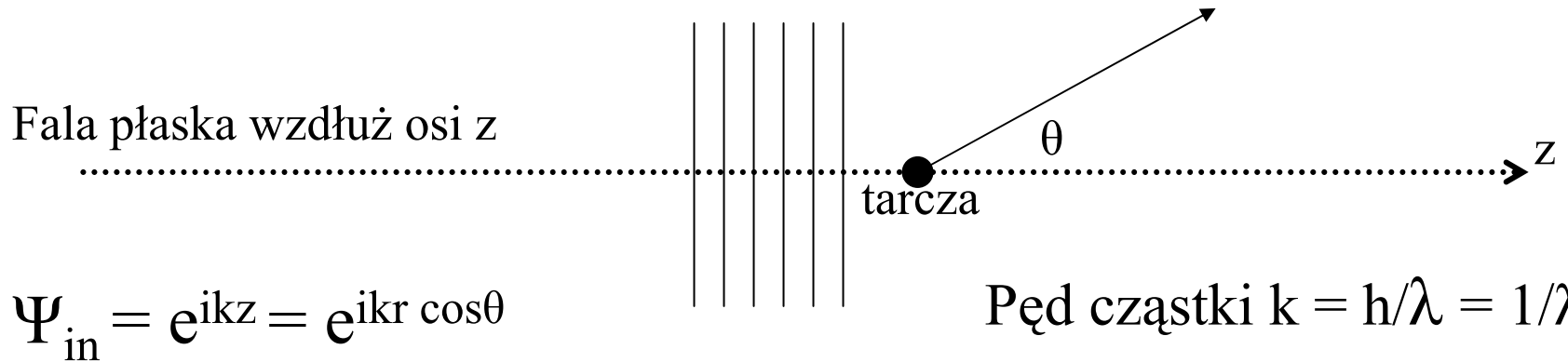
Rozdział 8

Elementy analizy fal cząstkowych

(PWA - *partial wave analysis*)

w eksperymentach formacji cząstek

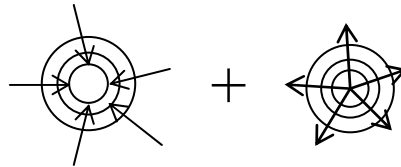
Rozpraszanie w polu $V(r)$ – bez spinu



$$\Psi_{\text{in}} = e^{ikz} = e^{ikr \cos\theta}$$

Asymptotycznie, $kr \rightarrow \infty$

$$\Psi_{\text{in}} = \frac{i}{2kr} \times \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \left[(-1)^l e^{-ikr} - e^{ikr} \right] P_l(\cos\theta)$$



Wpływ tarczy na falę wychodzącą

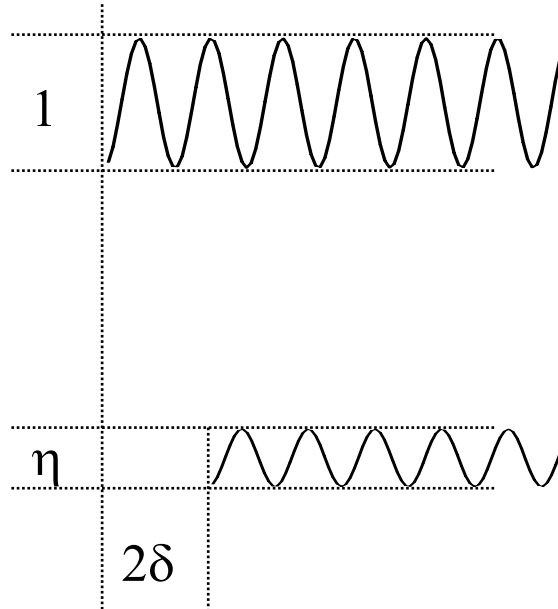
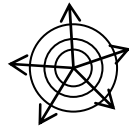
1) absorbcja (kanały nieelastyczne)

$$e^{ikr} \rightarrow \eta_l e^{ikr}$$

2) przesunięcie fazowe

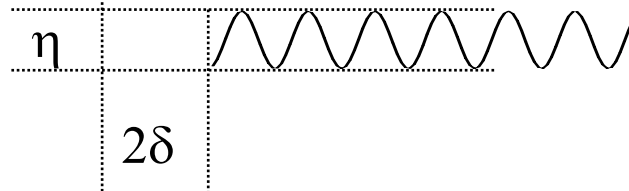
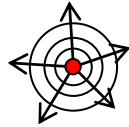
$$e^{ikr} \rightarrow \eta_l e^{ikr} e^{2i\delta_l}$$

bez tarczy
rozpraszającej



$$e^{ikr}$$

z tarczą
rozpraszającą



$$e^{ikr} \eta e^{2i\delta}$$

współczynnik absorpcji $\eta = 1$ znaczy, że nie ma absorpcji
(wszystkie cząstki wchodzące wychodzą także po rozproszeniu
jesli przesunięcie fazowe $\delta = 0$ oraz $\eta = 1$, to wiązka padająca na
tarczę nie doznaje żadnego zaburzenia

$$\eta_l, \delta_l - \text{funkcje momentu pędu } l \text{ oraz } E_{\text{cm}} \quad (1 \geq \eta_l \geq 0)$$

$$\Psi_{\text{in}} = \frac{i}{2kr} \times \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \left[(-1)^l e^{-ikr} - e^{ikr} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$\Psi_{\text{końc}} = \frac{i}{2kr} \times \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \left[(-1)^l e^{-ikr} - \eta_l e^{ikr} e^{2i\delta_l} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$\Psi_{\text{rozp}} = \Psi_{\text{końc}} - \Psi_{\text{in}} = \frac{1}{k} \sum (2l + 1) \underbrace{\left[\frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \right]}_{\text{amplituda parcjalna } a_l} P_l(\cos\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

amplituda parcjalna a_l

amplituda rozpraszania $f(\theta)$

$$\Psi_{\text{rozp}} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

amplituda rozpraszania $f(\theta)$
zawiera całą informację
o procesie rozpraszania

$$\Psi_{\text{rozp}} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1), \dots$$

Dla rozpraszania ku przodowi ($\cos\theta = 1$), $P_l(1) = 1$

$$a_l = \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} = \frac{1}{2} \left[\eta_l \sin 2\delta_l + i(1 - \eta_l \cos 2\delta_l) \right]$$

$$\text{Im } f(0) = \frac{1}{2k} \sum (2l + 1)(1 - \eta_l \cos 2\delta_l)$$

Przekrój czynny (rozpraszanie elastyczne, k niezmiennione)

$$\Phi_{\text{in}} = v_0 \Psi_{\text{in}}^* \Psi_{\text{in}} = v_0 \quad \text{strumień cząstek wchodzących}$$

$$\Phi_{\text{out}} = \left(r^2 d\Omega \right) v_0 \Psi_{\text{rozp}}^* \Psi_{\text{rozp}} = v_0 \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} r^2 d\Omega \stackrel{\text{df}}{=} d\sigma \cdot \Phi_{\text{in}}$$

$$v_0 d\sigma = v_0 |f(\theta)|^2 d\Omega$$

\Rightarrow

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{el}} = |f(\theta)|^2}$$

sens fizyczny amplitudy rozpraszania

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \frac{1}{k^2} \left| \sum (2l+1) \left[\frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \right] P_l(\cos\theta) \right|^2$$

całkowanie po kącie \Downarrow $\int_0^\pi P_l^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}$; $\int_0^\pi P_l P_{l'} d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2l+1) \left| \left[\frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \right] \right|^2$$

dla $\eta = 1$

$$\sigma_{el} = 4\pi\hat{\lambda}^2 \sum (2l+1) \sin^2\delta_l$$

max. dla $\delta_l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_{el, \max} = 4\pi\hat{\lambda}^2 (2l+1)$

$\delta_l = 0 \Rightarrow \sigma_{el} = 0$

$\eta_l = 0 \Rightarrow \sigma_{el} = \pi\hat{\lambda}^2 (2l+1)$

$\eta_l < 1$ rozpraszanie nieelastyczne (reakcje)

$$\sigma_{\text{inel}} = \sigma_r = \int \left(|\Psi_{\text{in}}|^2 - |\Psi_{\text{końc}}|^2 \right) r^2 d\Omega = \pi \hat{\lambda}^2 \sum (2l + 1) (1 - \eta_l^2)$$

(z zachowania prawdopodobieństwa)

$$\sigma_{\text{inel}}^{l, \text{max}} \underset{\substack{\uparrow \\ \eta_l = 0}}{=} \pi \hat{\lambda}^2 (2l + 1) = \sigma_{\text{el}}^l (\eta_l = 0)$$

Twierdzenie optyczne

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} = \pi \hat{\lambda}^2 \sum (2l + 1) \cdot 2(1 - \eta_l \cos 2\delta_l)$$

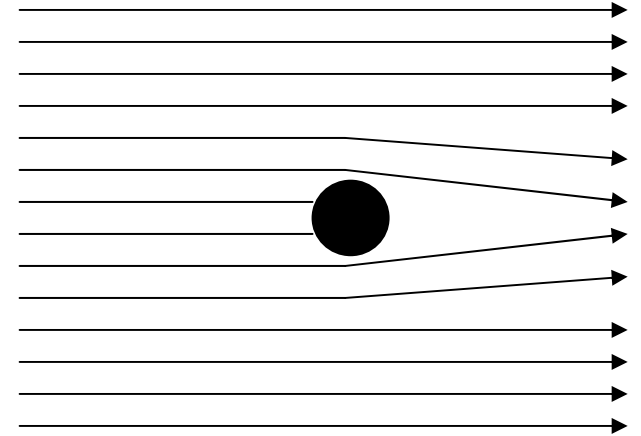
$$\text{Im } f_{\text{el}}(0) = \frac{1}{2k} \sum (2l + 1) \cdot (1 - \eta_l \cos 2\delta_l)$$

$$\text{Im } f_{\text{el}}(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}$$

Przykład: Czarna kula ($R \gg \hat{\lambda}$)

pełna absorpcja $\eta_l = 0; \quad l \leq R/\hat{\lambda}$

brak $\eta_l = 1; \quad l > R/\hat{\lambda}$



$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{l=0}^{R/\hat{\lambda}} (2l+1)\pi\hat{\lambda}^2 = \pi\hat{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{R/\hat{\lambda}} (2l+1) \approx \pi R^2$$

ponieważ $\sum \Rightarrow \int_0^{R/\hat{\lambda}} (2l+1) dl = [l^2 + l]_0^{R/\hat{\lambda}} = \frac{R^2}{\hat{\lambda}^2} + \frac{R}{\hat{\lambda}} \approx \frac{R^2}{\hat{\lambda}^2}$

$$\sigma_{\text{inel}} = \sigma_{\text{el}}$$

$$\sigma_{\text{całk}} = \sigma_{\text{inel}} + \sigma_{\text{el}} = 2\pi R^2$$

Tarcza ze spinem $\frac{1}{2}$ (bariony)

Dla każdego l dwa stany całkowitego momentu pędu $J = l \pm \frac{1}{2}$

$$\eta_l e^{2i\delta_l} \rightarrow \eta_l^\pm e^{2i\delta_l^\pm}$$

$$(2l + 1) \rightarrow (2J + 1)/2$$

zatem sumowanie we wzorach na przekroje czynne po dwóch stanach dla każdego l

dla danego l, J mamy:

$$\sigma_{\text{el}} = 4\pi\hat{\lambda}^2 \left(J + \frac{1}{2}\right) \left| \left[\frac{\eta e^{2i\delta} - 1}{2i} \right] \right|^2$$

$$\sigma_{\text{r}} = \pi\hat{\lambda}^2 \left(J + \frac{1}{2}\right) (1 - \eta^2)$$

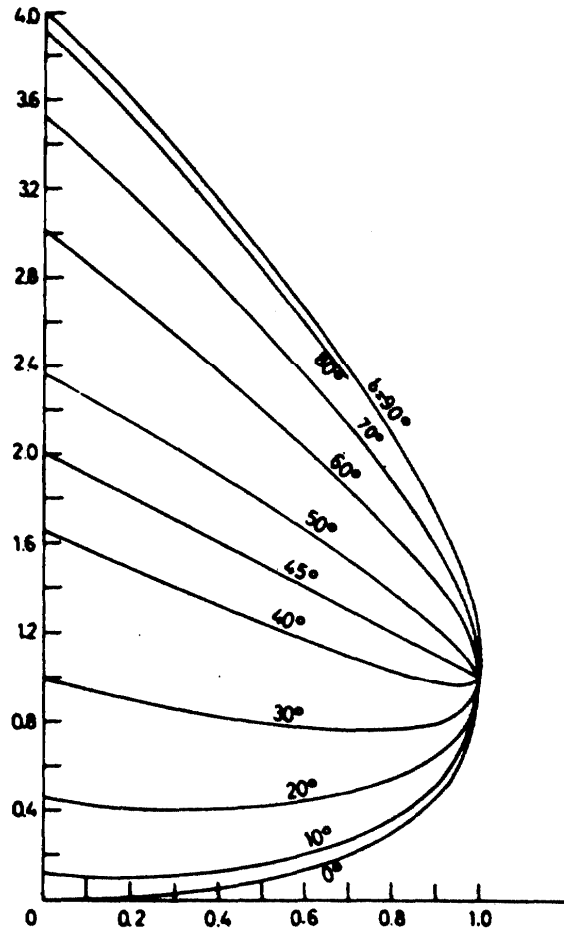
Funkcja

η, δ

η

η 

$$\frac{\sigma_{el}}{\pi \hat{\lambda}^2 \left(J + \frac{1}{2} \right)}$$



σ_{el} zależy od δ oraz η
 σ_r zależy tylko od η

$$\frac{\sigma_r}{\pi \hat{\lambda}^2 \left(J + \frac{1}{2} \right)} = 1 - \eta^2$$

Rozpraszanie rezonansowe (opuszczamy l , kładziemy $\eta = 1$)

$$f = \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \Rightarrow \frac{e^{i\delta} (e^{i\delta} - e^{-i\delta})}{2i} = e^{i\delta} \sin \delta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \delta - 1}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}, \operatorname{ctg} \delta = 0, \text{ rezonans przy } E = E_R$$

Szereg Taylora :

$$\operatorname{ctg} \delta(E) = \operatorname{ctg} \delta(E_R) + (E - E_R) \underbrace{\left[\frac{d}{dE} \operatorname{ctg} \delta(E) \right]_{E=E_R}}_{-2/\Gamma} + \dots \cong$$
$$\cong -(E - E_R) \frac{2}{\Gamma}$$

$$f(E) = \frac{1}{\operatorname{ctg} \delta - 1} = \frac{\Gamma/2}{(E - E_R) - i\Gamma/2}$$

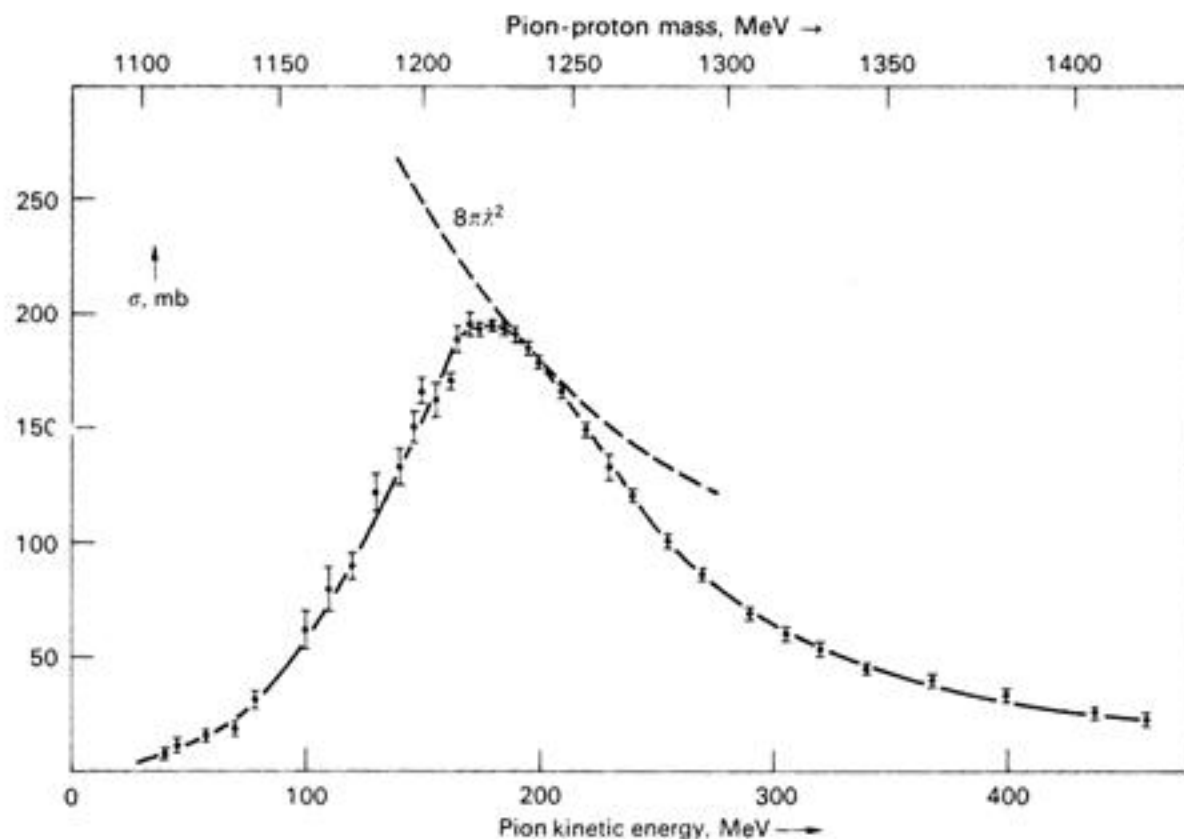
$$\sigma_{\text{el}}(E) = 4\pi\hat{\lambda}^2 (2l + 1) \frac{\Gamma^2 / 4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2 / 4}$$

wzór
Breita-Wignera

Rozpraszanie pion-proton

$$\sigma_{\text{el}}(E) = \frac{4\pi\hat{\lambda}^2}{2} \frac{(2J+1)\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

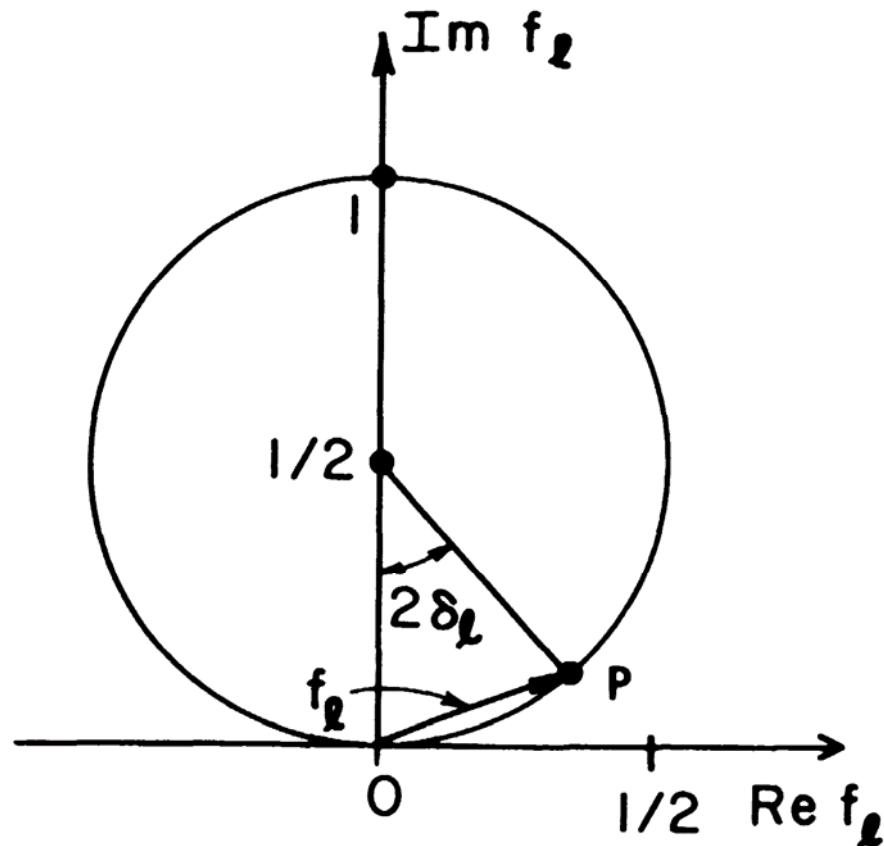
dla $J = 3/2$ $\sigma_{\text{el}}^{\text{max}} = 4\pi\hat{\lambda}^2 \left(J + \frac{1}{2} \right) = 8\pi\hat{\lambda}^2$



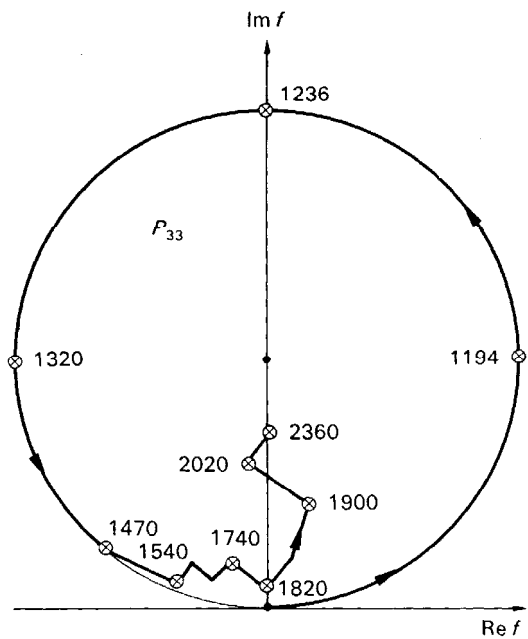
Wykres Arganda

$$\eta_l = 1$$

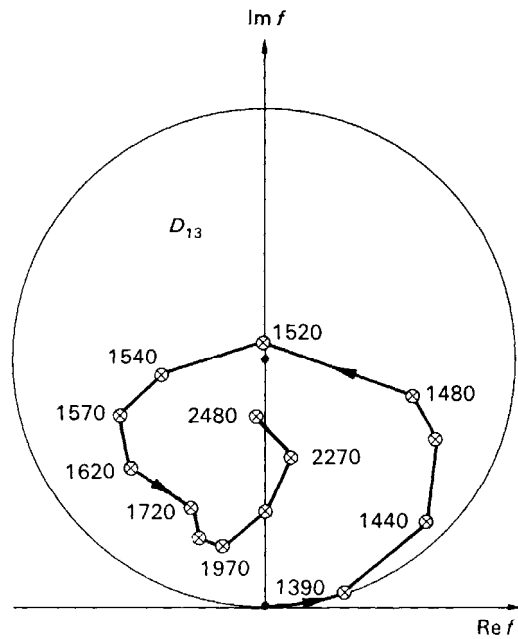
$$u^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



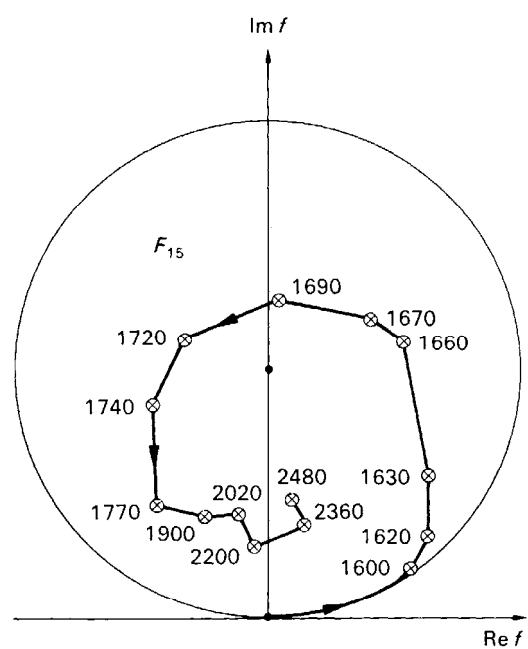
$$f_l = \frac{\Gamma/2}{(E - E_R) - i\Gamma/2} = \frac{1}{\varepsilon - i} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + 1} + i \frac{1}{\varepsilon^2 + 1} = u + iv$$



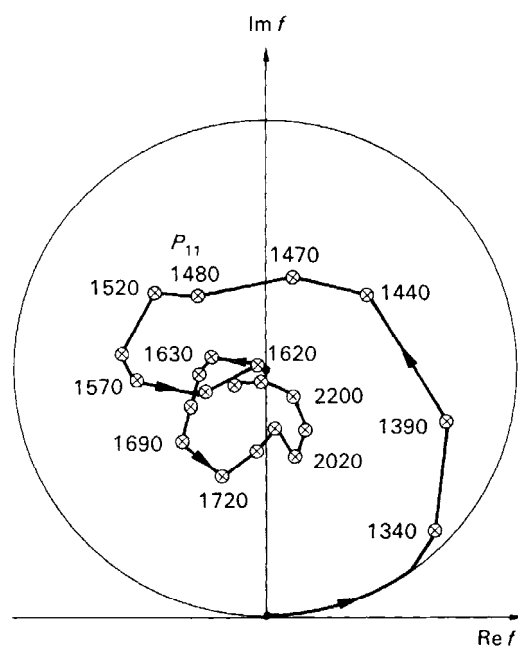
(a)



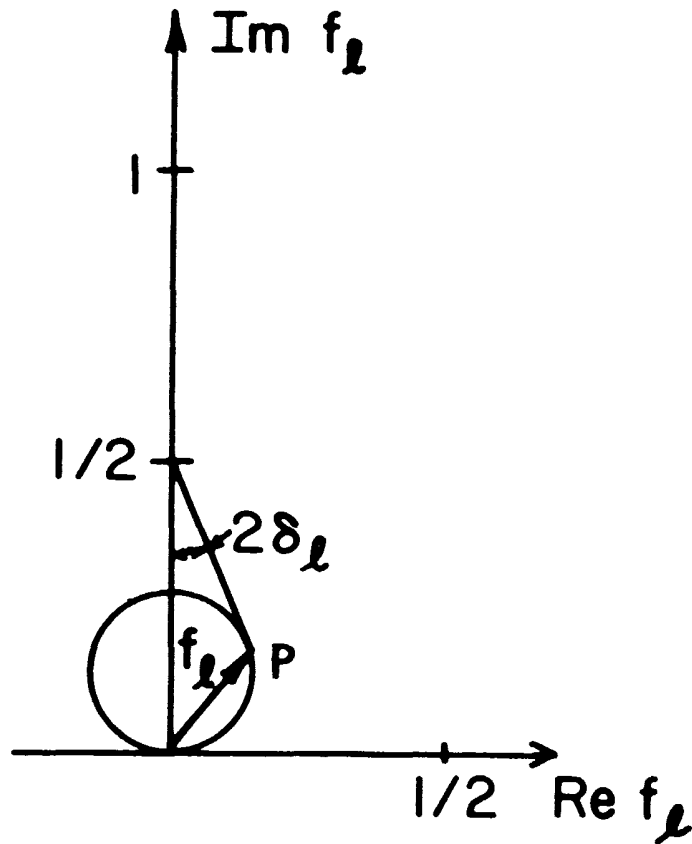
(c)



(b)



(d)



Jeśli występują reakcje: $\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_r$

$$x = \Gamma_e / \Gamma$$

$$f_e = \frac{\Gamma_e / \Gamma}{\varepsilon - i} = \frac{x}{\varepsilon - i} = \frac{x\varepsilon}{\varepsilon^2 + 1} + i \frac{x}{\varepsilon^2 + 1}$$

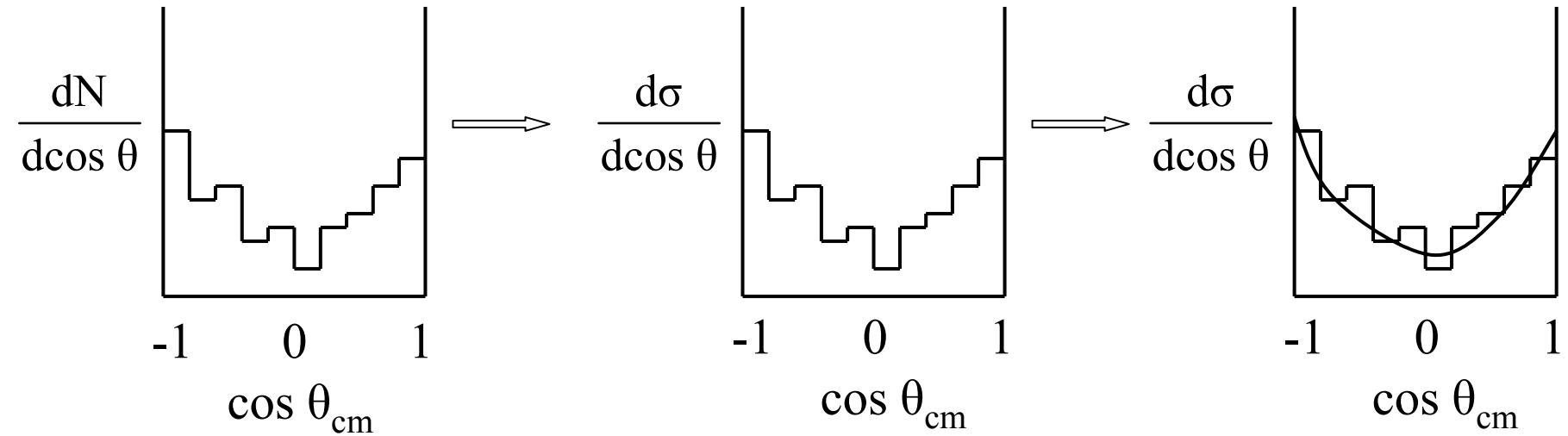
$$(\operatorname{Re} f_e)^2 + \left(\operatorname{Im} f_e - \frac{x}{2} \right)^2 = \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$x_r = \Gamma_r / \Gamma = (\Gamma - \Gamma_e) / \Gamma$$

$$f_r = \frac{\sqrt{xx_r}}{\varepsilon - i} = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{\varepsilon - i} = \frac{\sqrt{xx_r}}{\varepsilon^2 + 1} \varepsilon + i \frac{\sqrt{xx_r}}{\varepsilon^2 + 1}$$

$$(\operatorname{Re} f_r)^2 + \left(\operatorname{Im} f_r - \frac{\sqrt{xx_r}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{xx_r}}{2} \right)^2$$

Analiza fal cząstkowych (*partial wave analysis – PWA*)



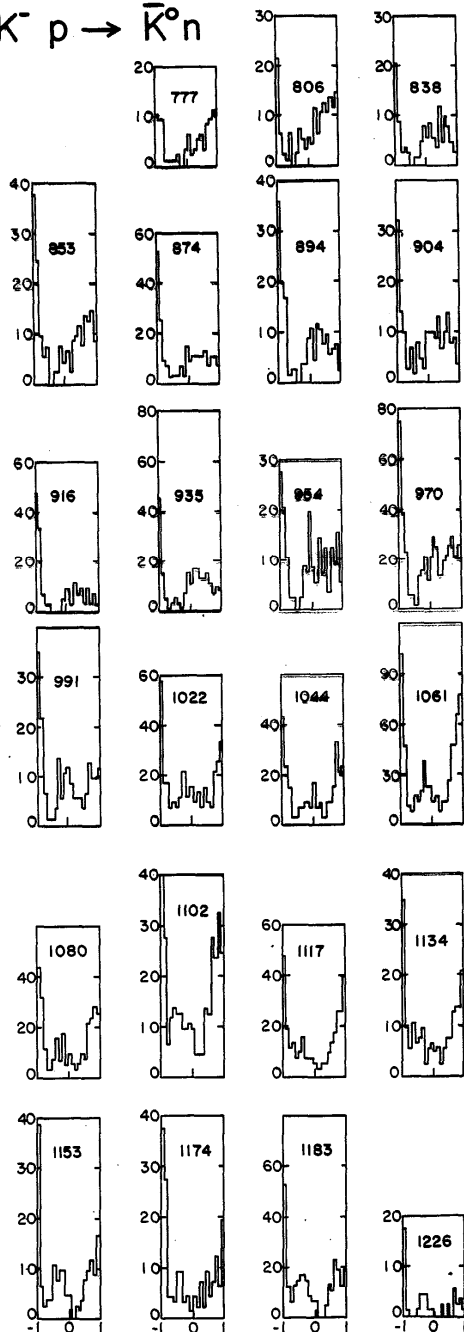
doświadczenie

dopasowanie

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \hat{\lambda}^2 \sum_n A_n P_n(\cos\theta)$$

Number of events per $\Delta \cos \theta = 0.1$

$K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$



$\cos \theta_{\bar{K}^0}$

