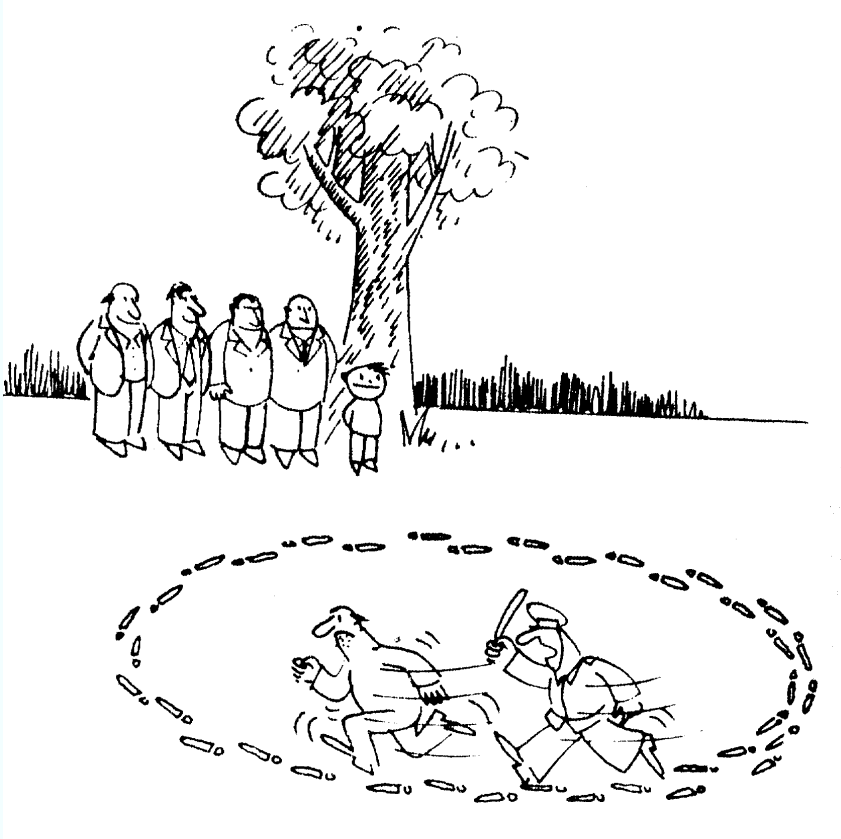


Zasady zachowania



- Pęd i moment pędu
- Praca, moc, energia
- Ruch pod działaniem sił zachowawczych
- Pęd i energia przy prędkościach bliskich prędkości światła

Pęd i moment pędu

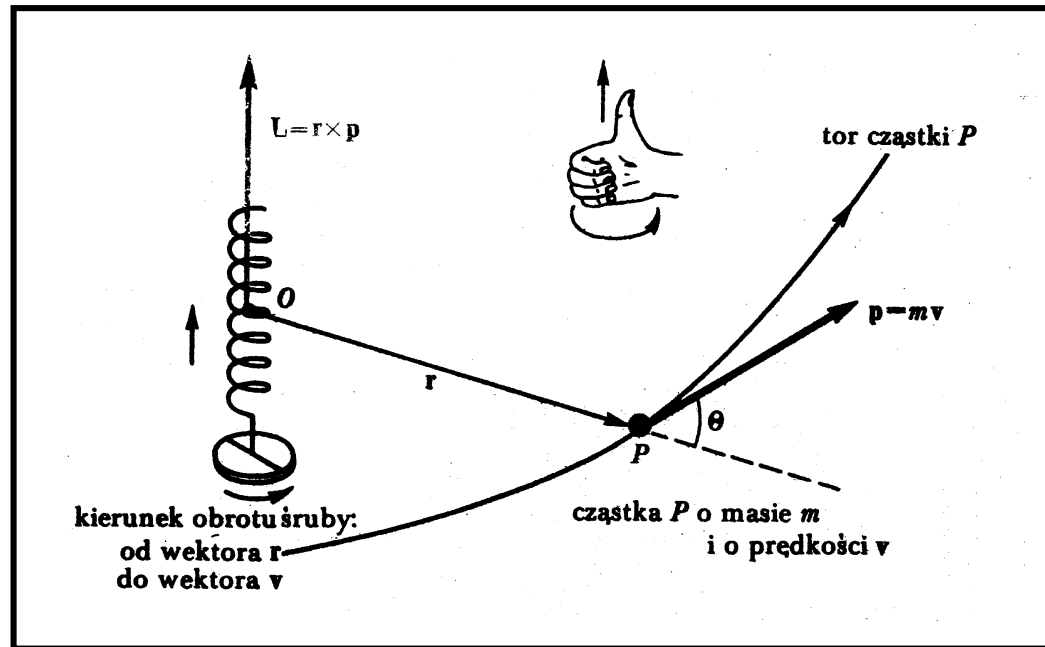
$$dp/dt = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{p} = \text{const}, \text{ gdy } \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{całka pędu})$$

Jest to zasada zachowania pędu

Moment pędu cząstki P
względem O

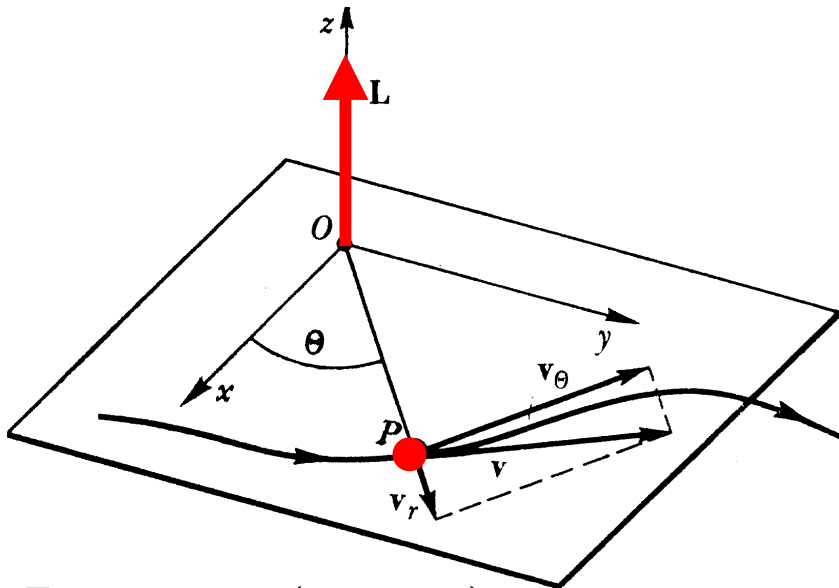
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$L = mrv \sin\theta$$



Pęd i moment pędu

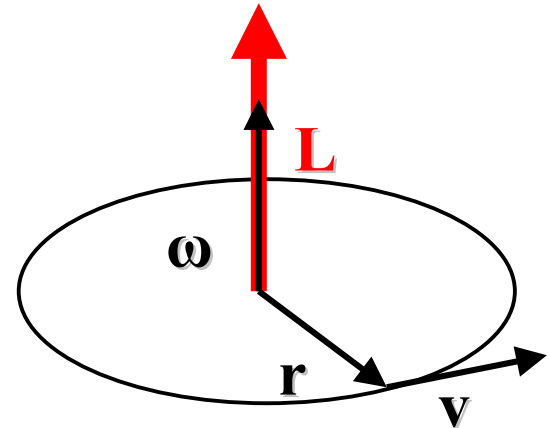
$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z] = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x]$$



$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta$$

$$L = mr v_\theta = mr^2(d\theta/dt)$$

Szczególny przypadek:
ruch po okręgu

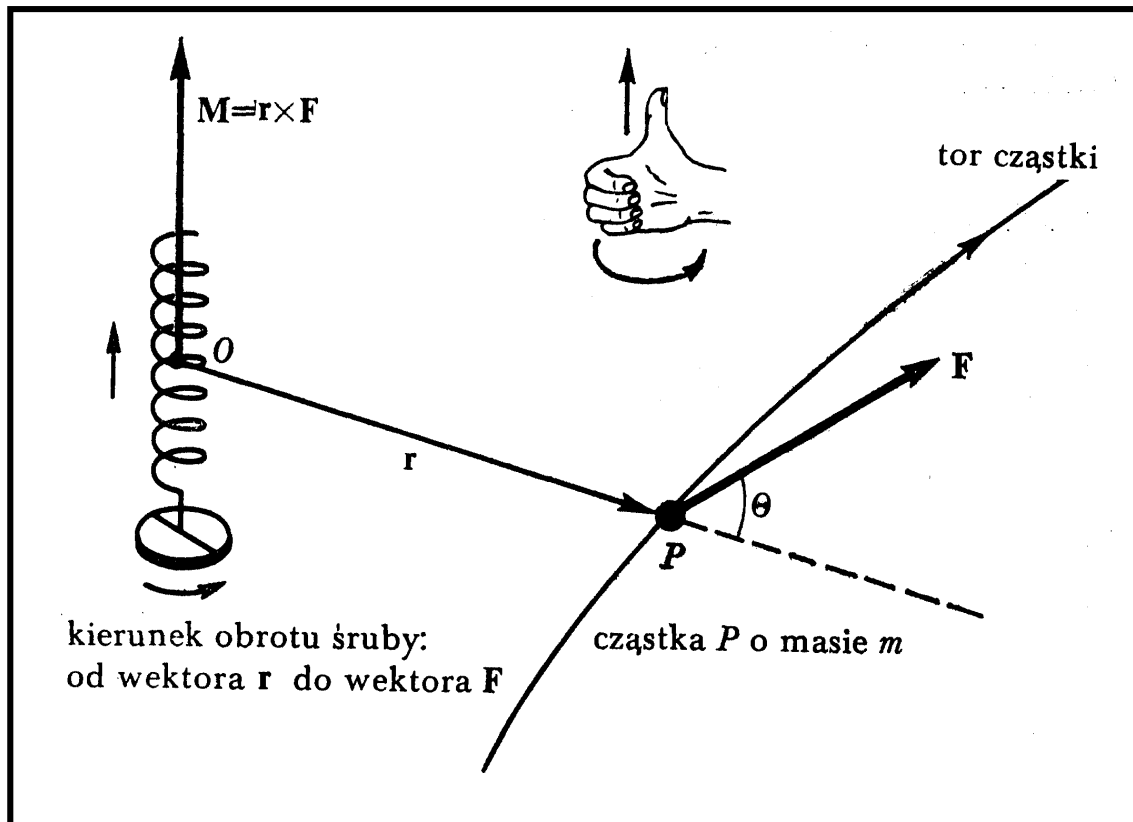


$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

$I = mr^2$ - moment bezwładności

Pęd i moment pędu

$$d\mathbf{L}/dt = (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

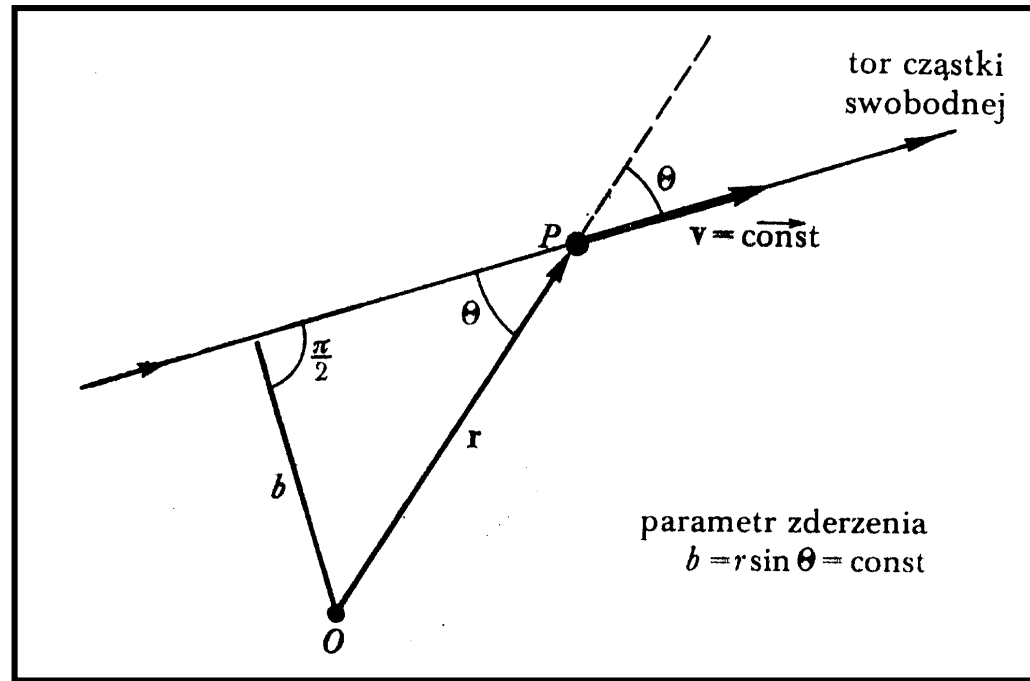


Moment siły \mathbf{F}
względem punktu O

$\mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const}$ Zachowanie momentu pędu

1. $\mathbf{F} = 0$ (cząstka swobodna)

$$L = mvr \sin \theta = mvb = \text{const}$$



2. Siła \mathbf{F} równoległa do \mathbf{r} , czyli $\mathbf{F} = f(r) \mathbf{i}_r$ (siła centralna)

Przykłady: siła grawitacji

$$f(r) = -Gm_1m_2/r^2$$

siła kulombowska

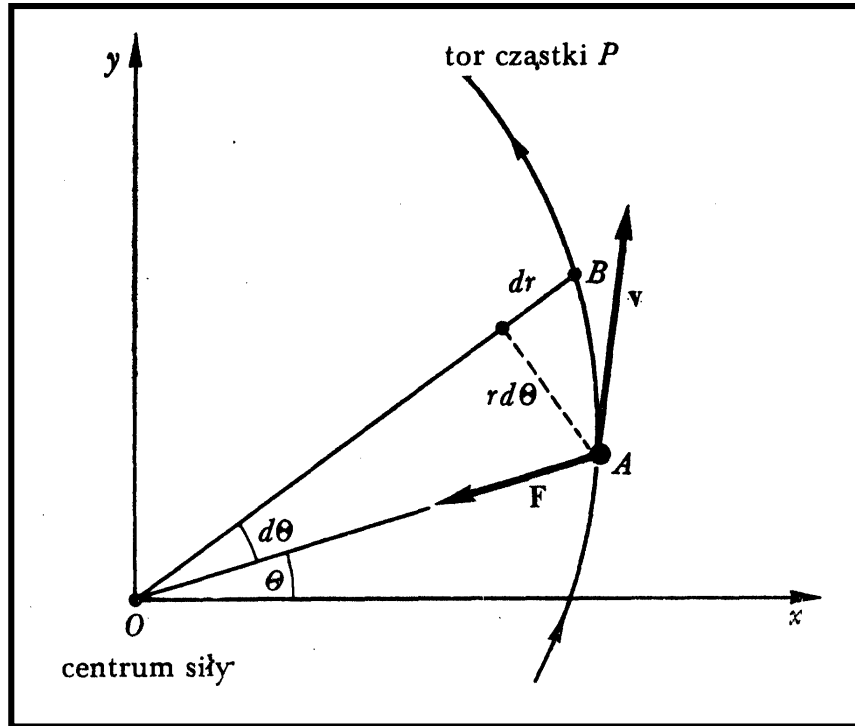
$$f(r) = Q_1Q_2/4\pi\epsilon_0r^2$$

siła sprężysta

$$f(r) = -kr$$

Ruch pod działaniem siły centralnej jest ruchem płaskim

Prędkość polowa



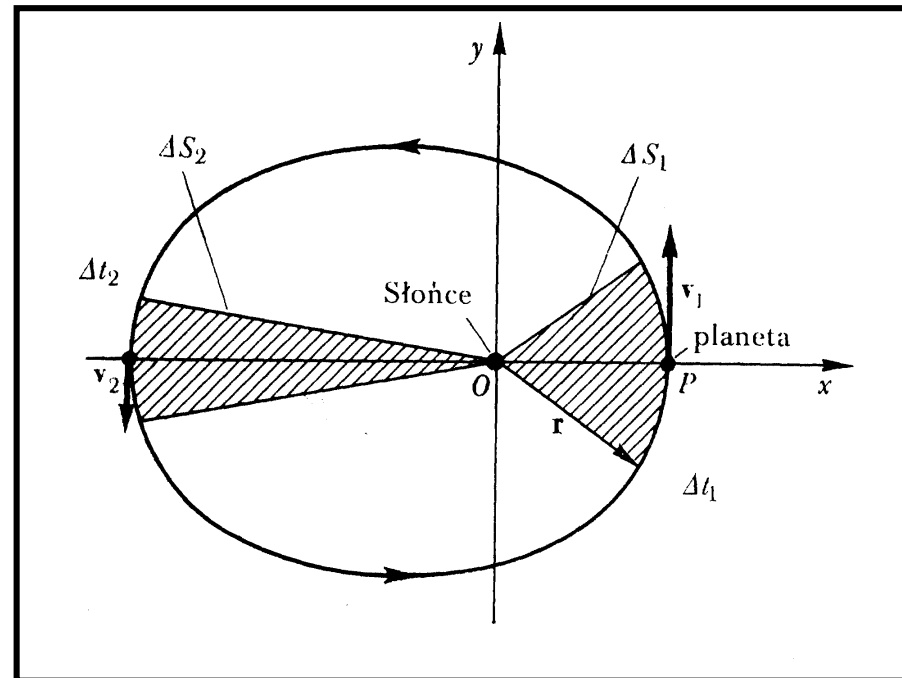
$$dS = (\Delta OAB) = \frac{1}{2}r^2d\theta = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

$$dS/dt = \frac{1}{2}r^2(d\theta/dt) = L/2m = \text{const}$$

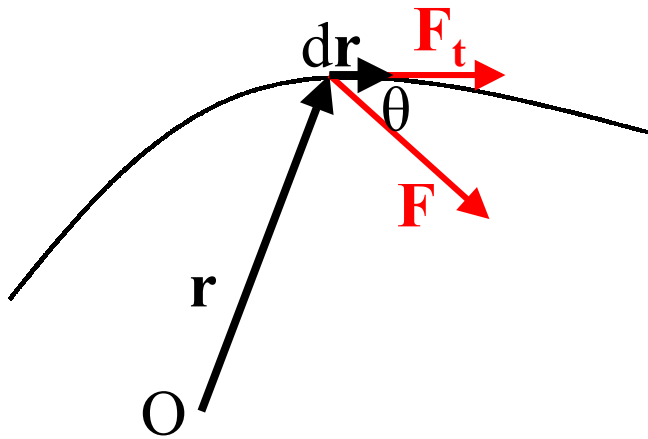
Prędkość polowa w ruchu pod działaniem siły centralnej jest stała

II Prawo Keplera: W jednakowych odstępach czasu promień wodzący planety zakreśla jednakowe pola

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 \text{ dla } \Delta t_1 = \Delta t_2$$



Praca, moc, energia



Praca siły \mathbf{F} przy przesunięciu $d\mathbf{r}$

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos\theta ds = F_t ds$$

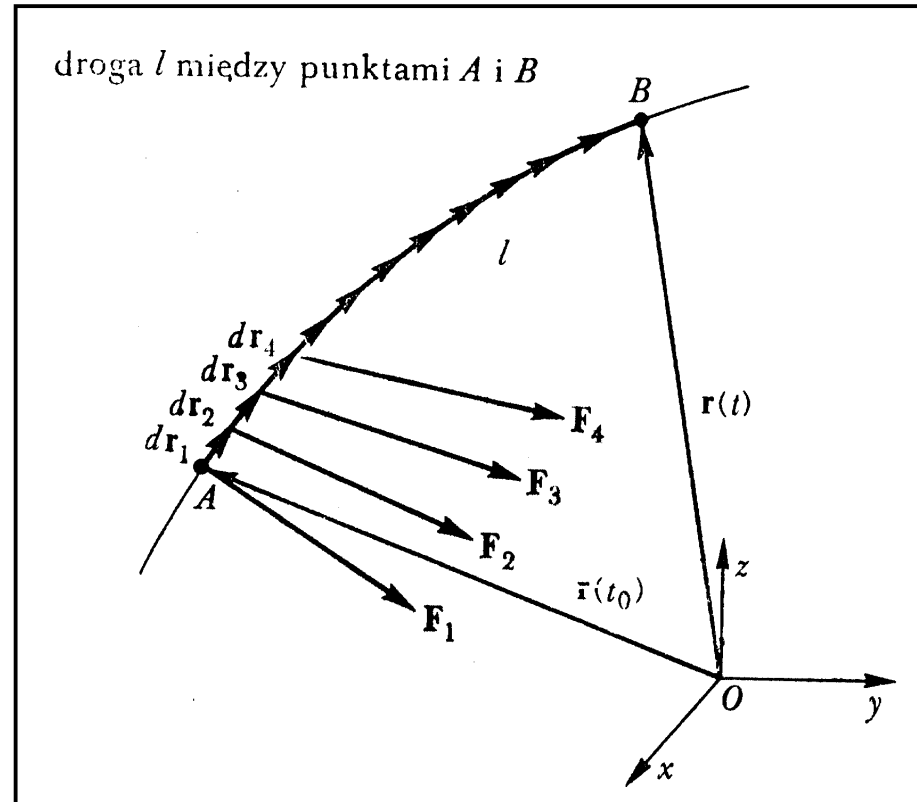
Siła normalna do przesunięcia
wykonuje pracę = 0

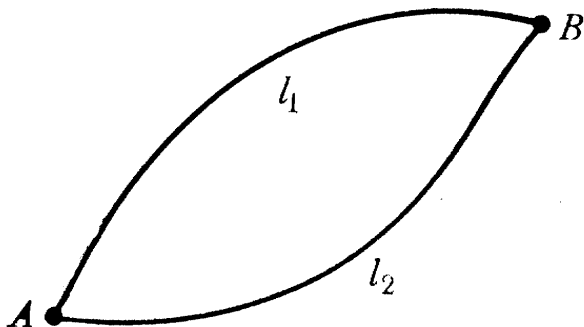
Przykłady: siła Lorentza, siła dośrodkowa

Praca na drodze między A i B

$$W = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \dots$$

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

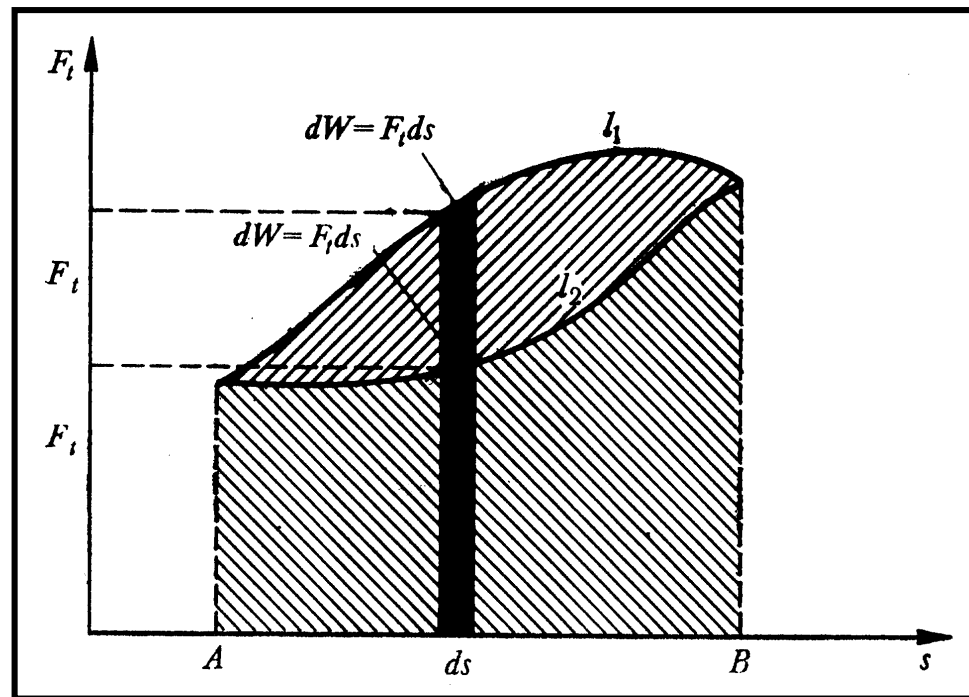




Ogólnie praca W_{AB} zależy od drogi, po której odbywa się przesunięcie między A i B

Siłę \mathbf{F} oraz drogę l możemy przedstawić w funkcji parametru, np. długości łuku s

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(s), \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$



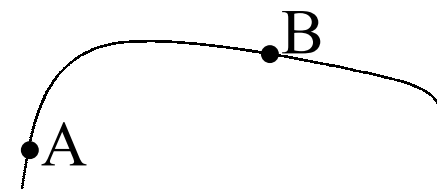
Moc $P = dW/dt = \mathbf{F}(dr/dt) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Jednostka pracy: dżul (J) $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

Jednostka mocy: wat (W) $1 \text{ W} = 1 \text{ J}/1 \text{ s} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3$

Praca i energia kinetyczna

$$\mathbf{F}d\mathbf{r} = F_t ds = m(dv/dt)ds = m dv (ds/dt) = mv dv$$



$$\mathbf{W} = \int_A^B \mathbf{F}_t d\mathbf{s} = \int_A^B m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 = \mathbf{E}_{k,B} - \mathbf{E}_{k,A} = \Delta\mathbf{E}_k$$

Niezależnie od postaci siły \mathbf{F} i drogi praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała w punktach końcowym B i początkowym A drogi

Przykład: ruch pod działaniem

stałej siły $\mathbf{F} = \mathbf{const}$

(np. ruch w polu grawitacyjnym blisko powierzchni Ziemi)

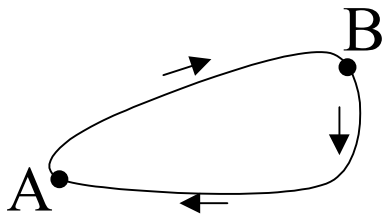
$$\mathbf{W} = \int_A^B \mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F} \int_A^B d\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$

Jest to szczególny przykład sił zachowawczych (konserwatywnych)

Siły zachowawcze i energia potencjalna

$$W = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Siły zachowawcze są takimi funkcjami $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ że pracę można wyrazić przez różnicę wielkości $E_p(\mathbf{r})$ na początku i na końcu drogi



Jeżeli droga jest zamknięta, to praca jest równa zero

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$$

Cyrkulacja (krążenie)
wektora \mathbf{F}

$$\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = E_{p,A} - E_{p,B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\int_A^B dE_p$$

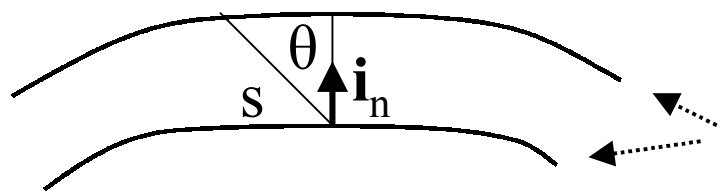
zatem $\mathbf{F} d\mathbf{r} = -dE_p$

Energia potencjalna

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{i}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\text{grad } E_p = -\nabla E_p$$

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{operator różniczkowy „nabla”}$$



powierzchnie ekwipotencjalne

gradient ma kierunek normalny do
powierzchni ekwipotencjalnej

$$\text{grad } E_p = \mathbf{i}_n \frac{\partial E_p}{\partial n} ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial s} = |\text{grad } E_p| \cos \theta$$

•
centrum siły

(pochodna kierunkowa)

Zasada zachowania energii

$$W = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad \begin{array}{l} \text{energia} \\ \text{całkowita} \end{array}$$

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A = E = \text{const}$$

$$F = -kr = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

Przykład 1: siła sprężysta

$$E_p = \int k r dr = \frac{1}{2} k r^2 + C$$

Przykład 2: $F = \frac{k}{r^2}$; $E_p = \int -\frac{k dr}{r^2} = \frac{k}{r} + C$

$k = -GMm$ siła grawitacyjna

$$E_p = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R(1+\frac{h}{R})} \approx -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \underbrace{-\frac{GMm}{R}}_{\text{const}} + \underbrace{\frac{GMm}{R^2} h}_{mgh}$$

Wykorzystanie zasady zachowania energii do rozwiązywania zagadnień ruchu

Przykład: Ruch prostoliniowy pod działaniem zachowawczej siły F

Mamy $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) = \text{constans}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{2}{m} (E - E_p(x)) \right]^{1/2}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\left[\frac{2}{m} (E - E_p(x)) \right]^{1/2}} = \int_0^t dt = t$$

Jeżeli znamy $E_p(x)$, to stąd znajdujemy związek między x i t

$$\text{Przypadek } \mathbf{F = constans}; \quad dE_p = -Fdx \quad \Rightarrow \quad E_p = -Fx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2/m}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E + Fx}} = t$$

$$\frac{2}{F} \sqrt{E + Fx} - \frac{2}{F} \sqrt{E} = \sqrt{2/m} \, t$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right)}_a t^2 + \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{m}}}_{v_0} t$$

$$\{E = mv^2/2 + Fx; \text{ stąd } E = mv_0^2/2 \text{ jeśli } x = 0 \text{ dla } t = 0\}$$

Ruch w polu zachowawczej siły centralnej

Zachowanie energii: $E = mv^2/2 + E_p(r) = \text{constans}$

Zachowanie momentu pędu: $L = mrv_\theta = \text{constans}$

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

„energia
odśrodkowa”

energia potencjalna
pola siły centralnej

$E_{p,ef}(r)$

efektywna energia potencjalna

Nazwa „energia odśrodkowa” pochodzi stąd, że „siła” związana z tą energią ma zwrot od centrum siły

$$F_o = - \frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} \right) = \frac{L^2}{mr^3} = mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Ruch w polu zachowawczej siły centralnej

Można rozwiązać osobno zagadnienie „części radialnej” ruchu

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_{p,ef}(r))}$$

To równanie określa granice zmienności r podczas ruchu

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_{p,ef}(r))}} = \int_0^t dt = t \quad \Rightarrow \quad r(t)$$

Dwie możliwości:

$r \geq r_{\min}$	ruch nieskończony
$r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$	tor w obszarze ograniczonym

Ruch w polu zachowawczej siły centralnej

„część kąтова” ruchu
ze związku $L = mr^2(d\theta/dt)$

$$\theta - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_{p,ef})} \frac{mr^2}{L}$$

$$\theta = \int \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_{p,ef})}} dr + \text{constans}$$

Równanie toru we
współrzędnych
biegunowych

Ruch w polu zachowawczej siły centralnej

$$\Delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_{p,ef})}}$$

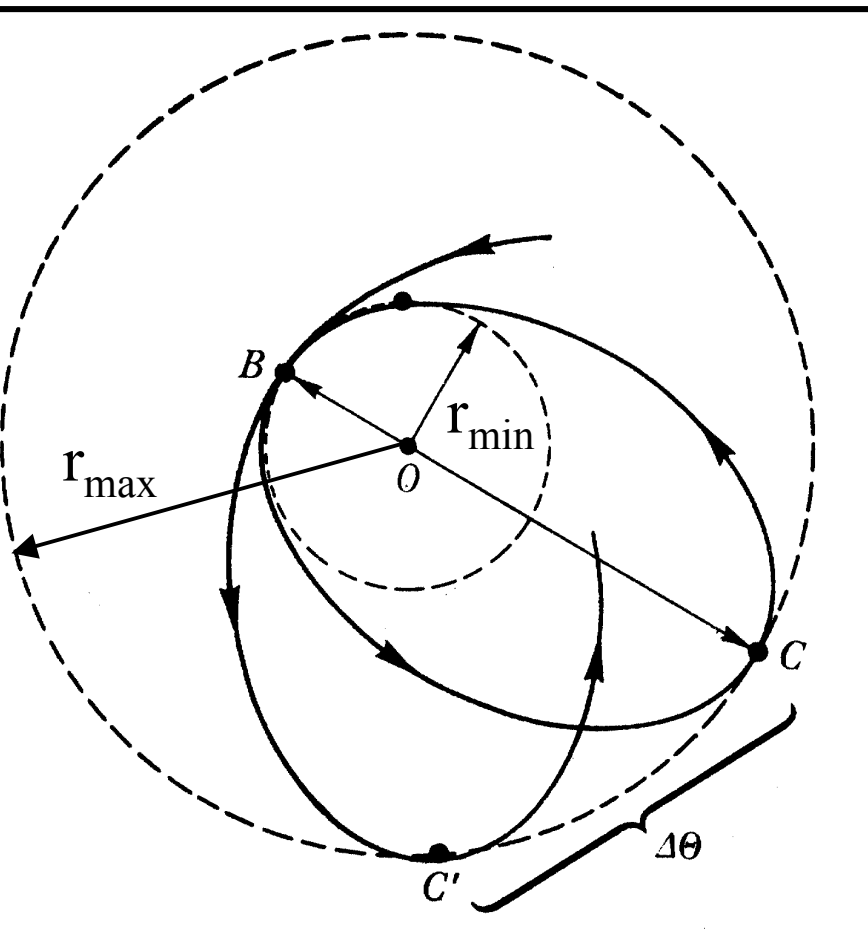
zmiana kąta biegunowego
przy przejściu od r_{\max} do r_{\min}
i z powrotem

Tor będzie krzywą zamkniętą,
jeżeli $\Delta\theta = 2\pi(m/n)$, gdzie
 m, n są liczbami całkowitymi

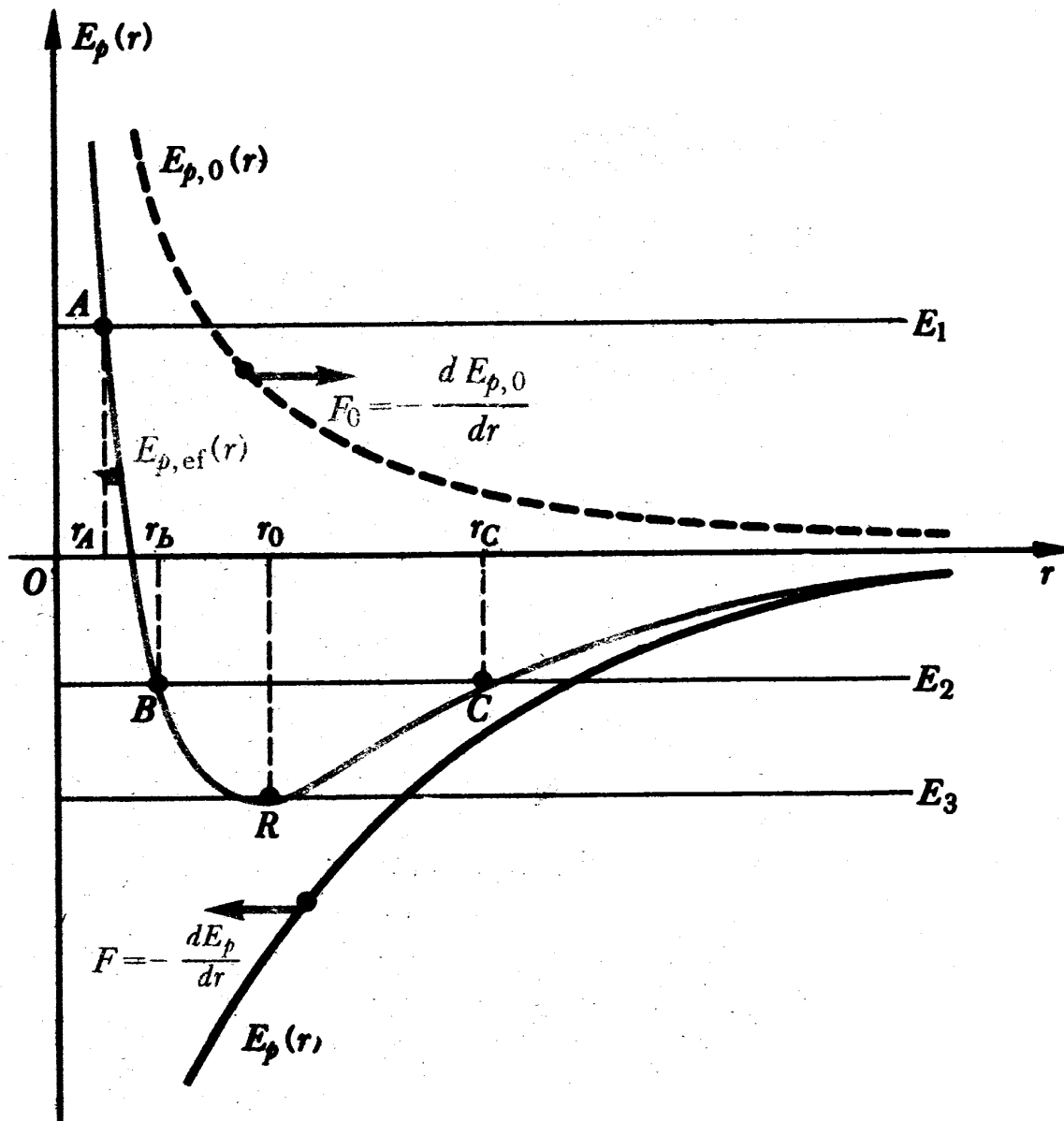
Występuje to tylko dla dwóch pól

$$E_p(r) \sim r^{-1}$$

$$E_p(r) \sim r^2$$



Ruch w polu $E_p(r) = -kr^{-1}$ ($k > 0$, siła przyciągająca)



Przykład: ruch planet,
komet itd.

Przy energii E_1 ruch
nieskończony po
hiperboli, $r > r_A$

Przy energii E_2 ruch
skończony po elipsie
 $r_{\max} = r_C \geq r \geq r_B = r_{\min}$

Przy energii E_3 ruch
skończony po okręgu
 $r = r_0 = r_{\max} = r_{\min}$

Ruch w polu $\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}^{-1}$ ($k > 0$, siła przyciągająca)

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_{p,ef})}} dr = \int \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} dr =$$

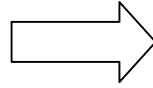
$$= - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

$$p = \frac{L^2}{mk} \quad \text{parametr orbity (krzywej stożkowej)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \quad \text{mimośród orbity} \quad \left\{ \begin{array}{l} E < 0, \varepsilon < 1 \text{ elipsa} \\ E = 0, \varepsilon = 1 \text{ parabola} \\ E > 0, \varepsilon > 1 \text{ hiperbola} \end{array} \right.$$

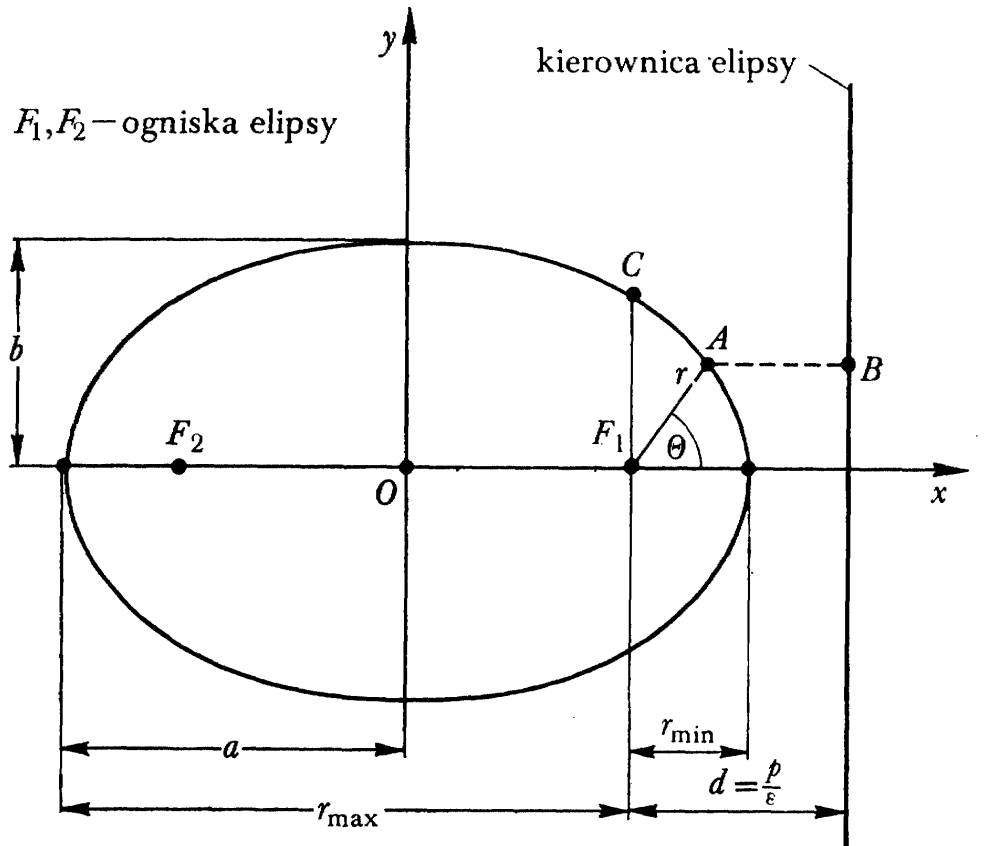
Ruch w polu $\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}^{-1}$ ($k > 0$, siła przyciągająca)

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$$



$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

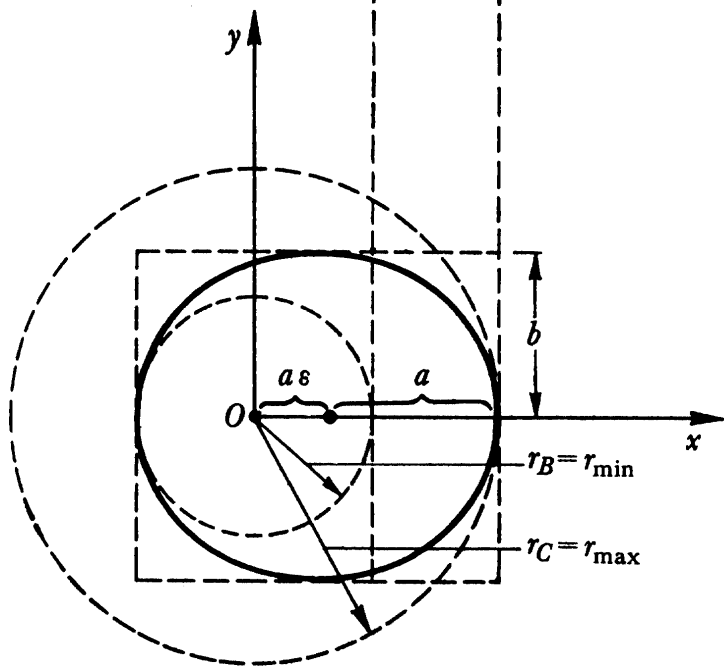
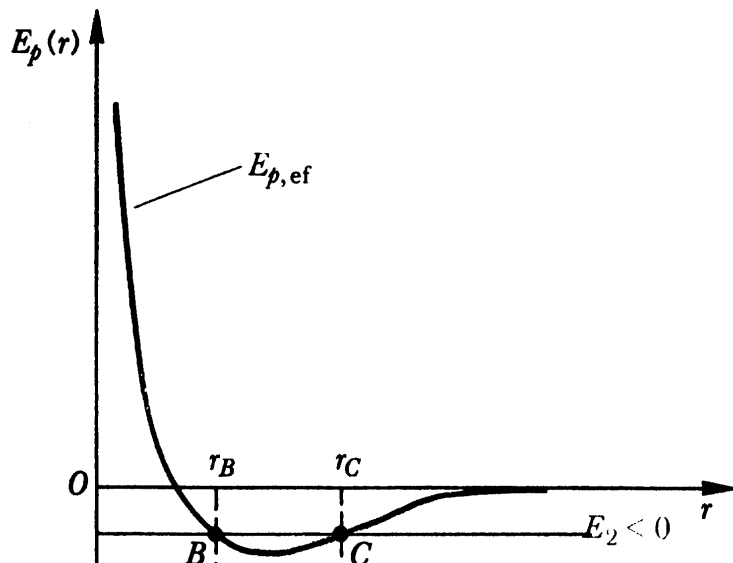
równanie krzywej stożkowej
we współrzędnych biegunowych



$$\varepsilon = r/AB$$

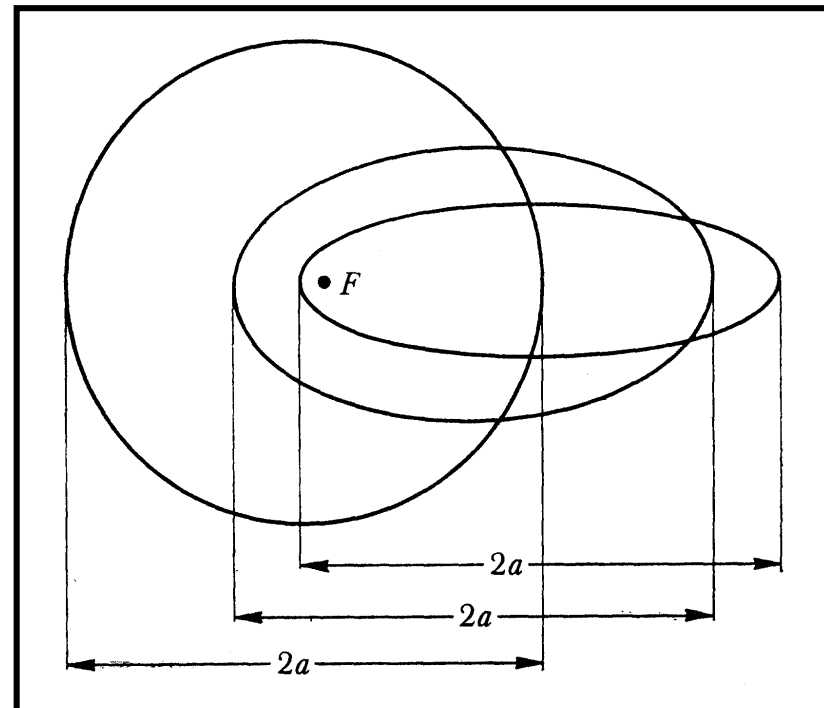
$$2a = r_{\max} + r_{\min} = 2p/(1 - \varepsilon^2) = k/2|E|$$

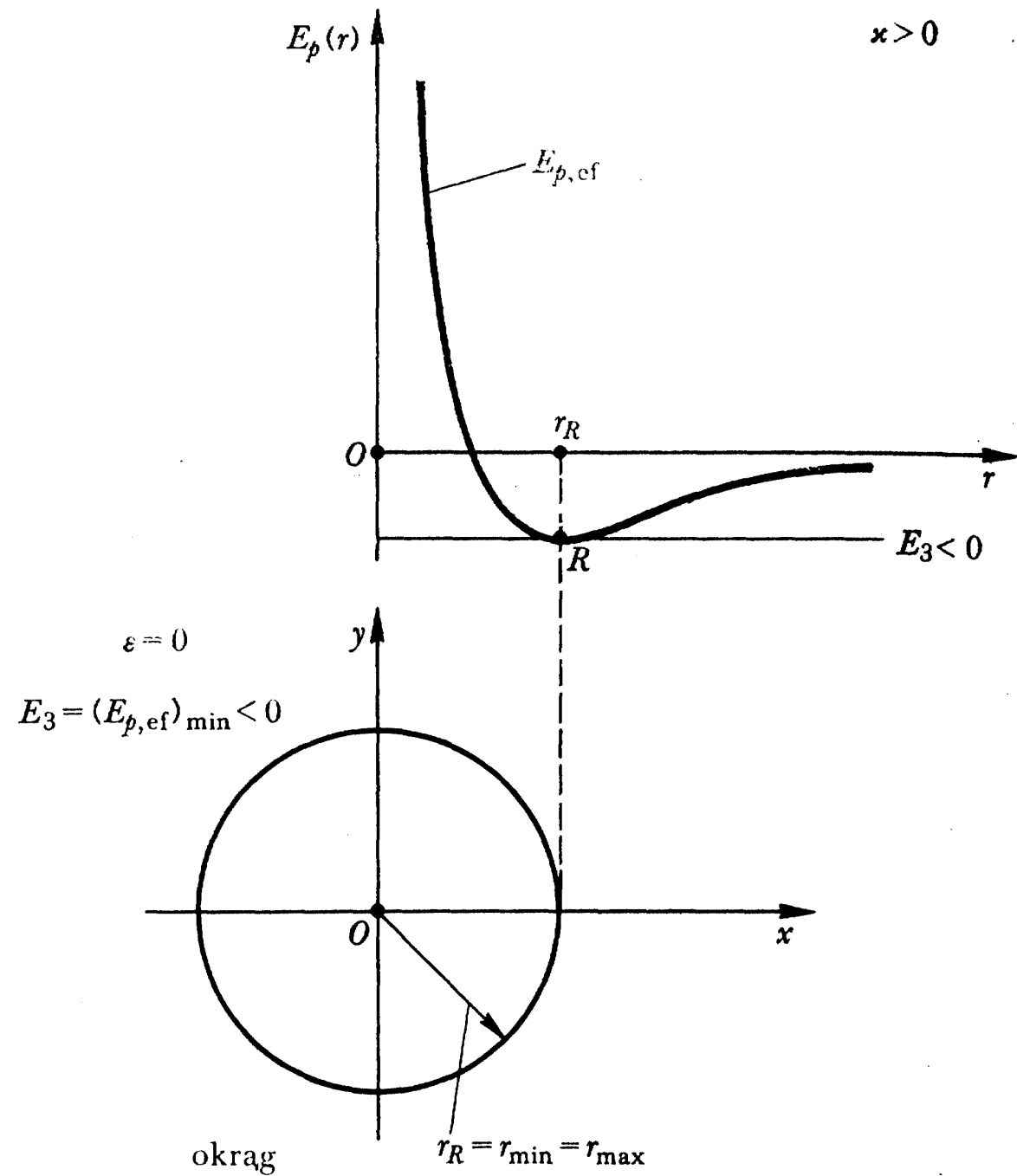
$$2b = 2p(1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} = L(2m|E|)^{-\frac{1}{2}}$$



W ruchu po elipsie odległość od centrum siły zmienia się od r_{min} (w pericentrum) do r_{max} (w apocentrum).

Energia ruchu po elipsie zależy wyłącznie od wielkiej półosi elipsy, natomiast moment pędu - od małej półosi

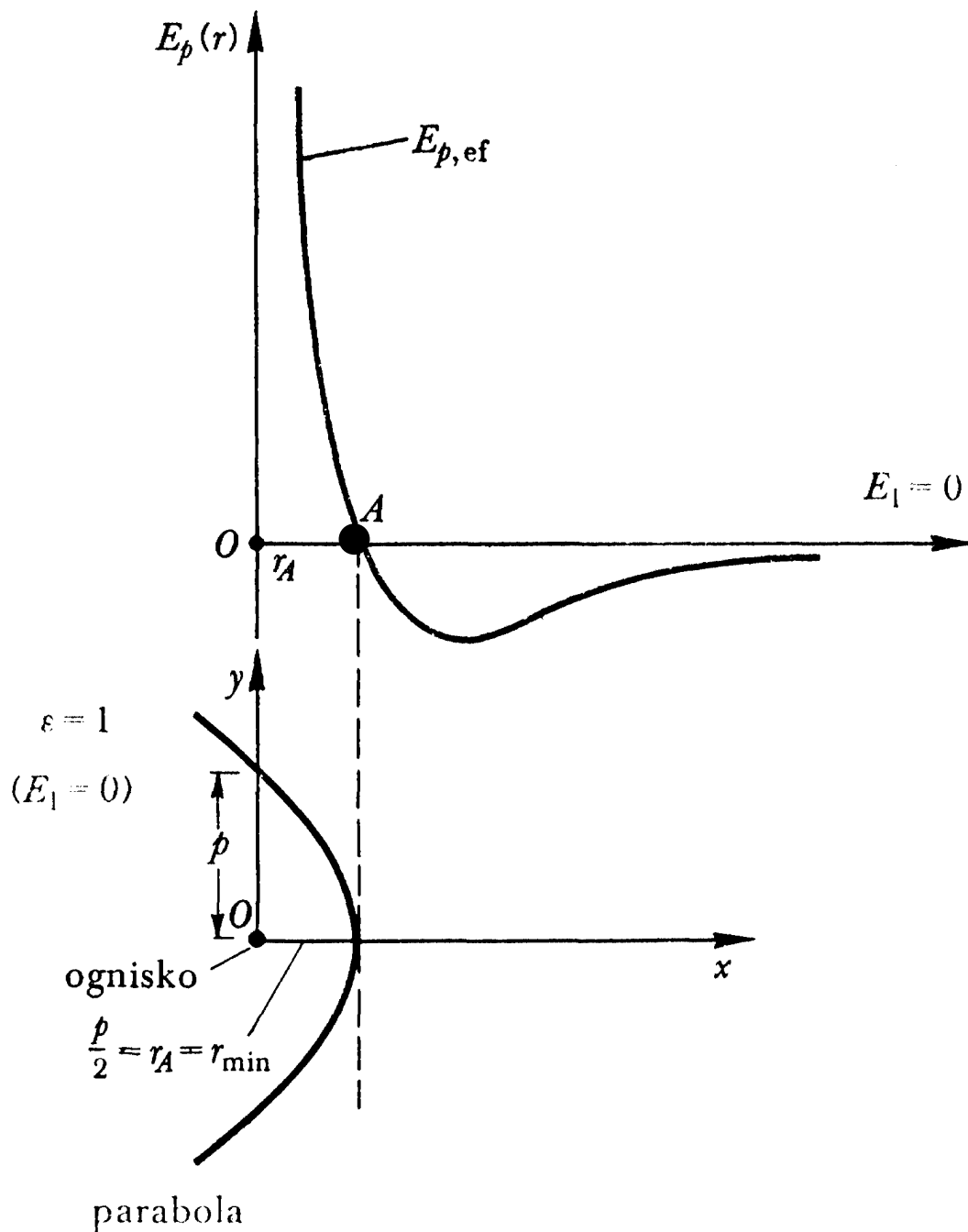




W szczególnym
 przypadku
 $r_{\min} = r_{\max} = r$
 mamy ruch po okręgu

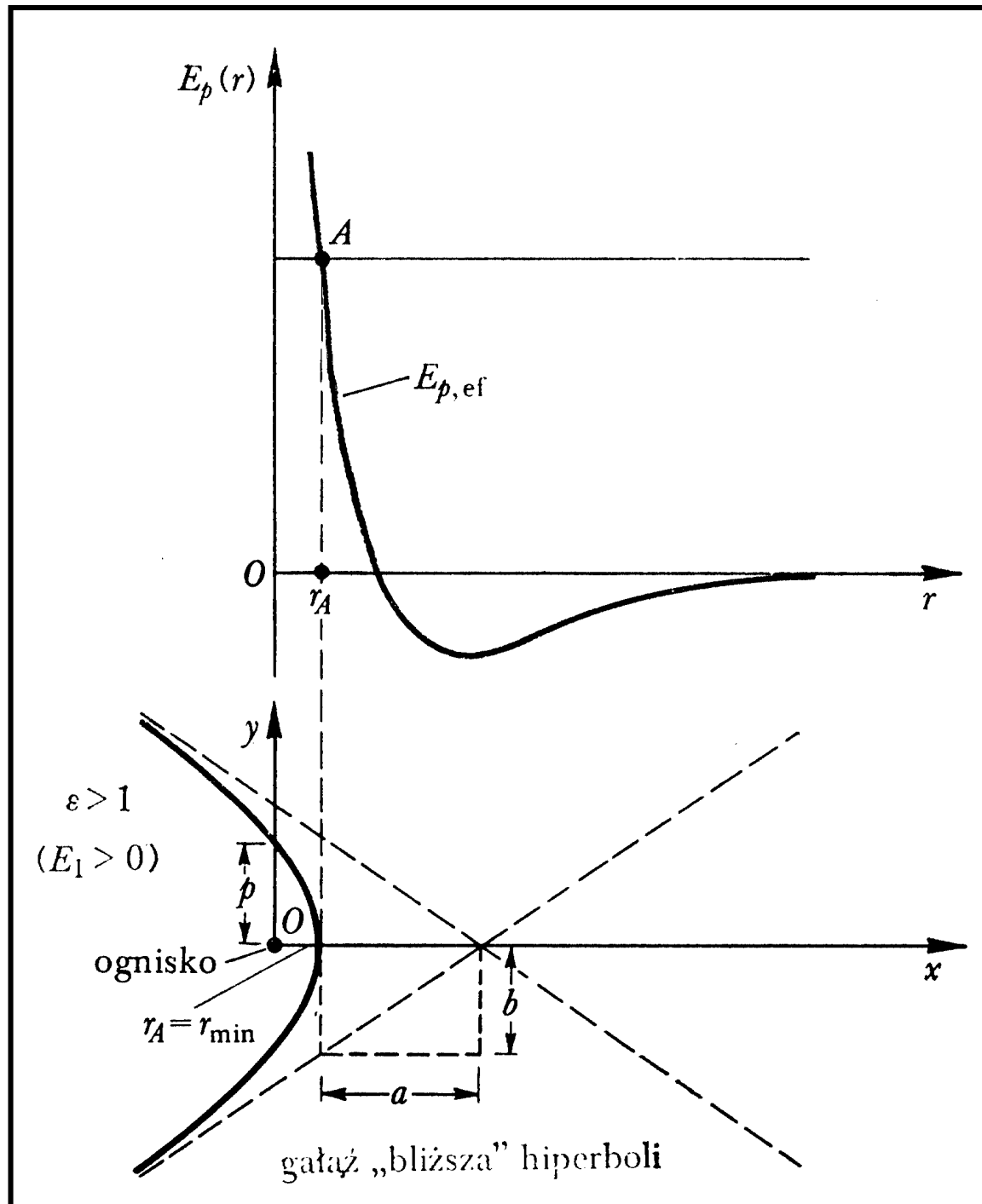
Innym szczególnym
 przypadkiem elipsy
 jest odcinek linii
 prostej o długości $2a$.

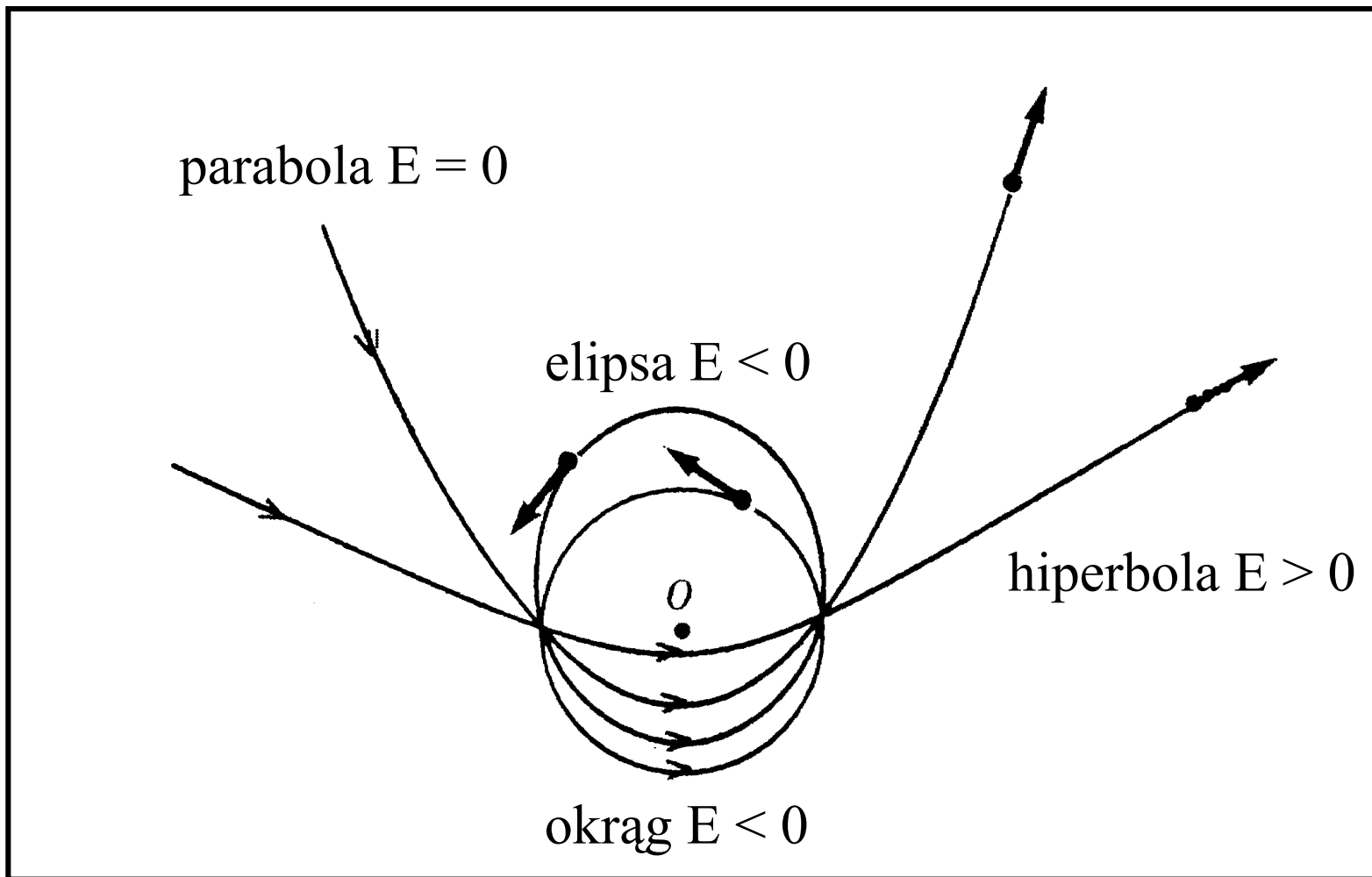
Wartość $b = 0$
 odpowiada zerowemu
 momentowi pędu
 $L = 0$



Dla szczególnego przypadku $E = 0$ torem ruchu ciała jest parabola. Ruch jest nieskończony, a ciało nie jest związane przez centrum siły.

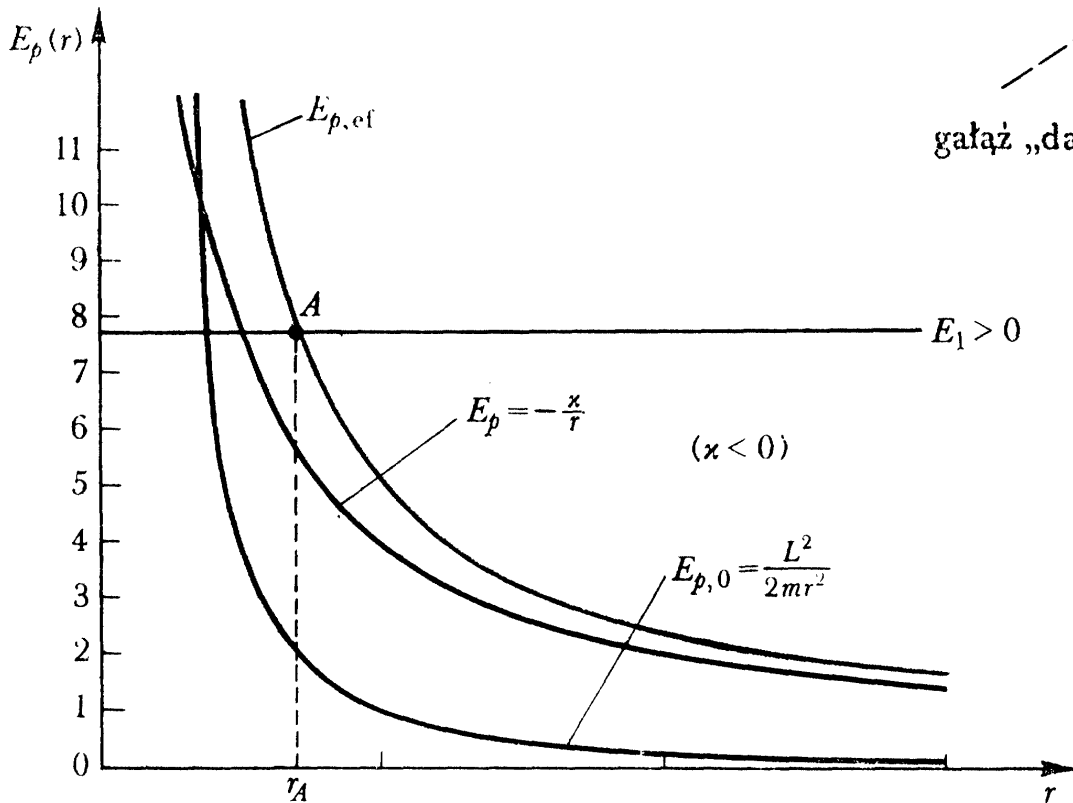
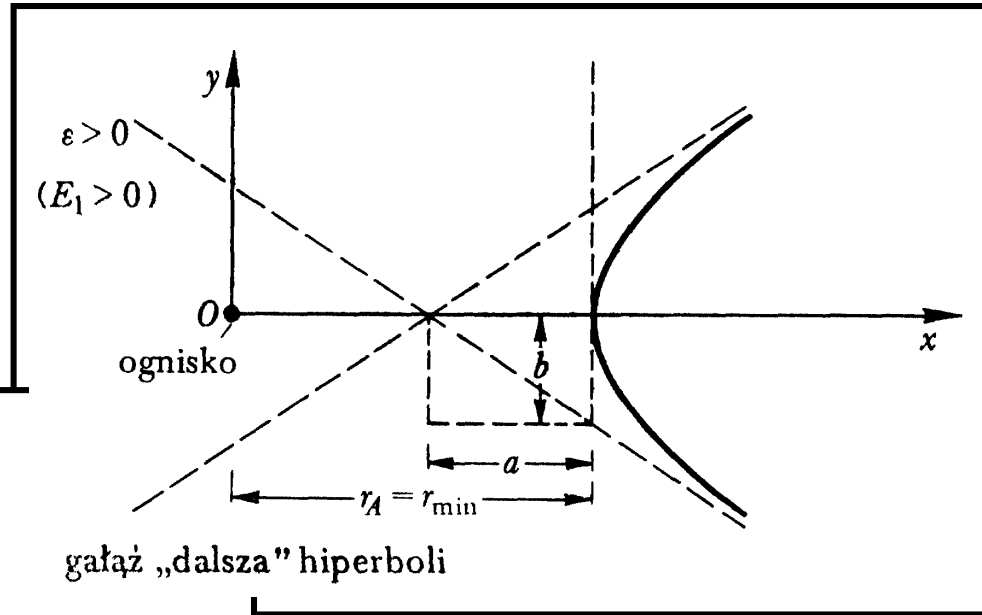
Dla $E > 0$ ruch jest nieskończony; ciało osiąga największe zbliżenie do centrum siły w punkcie $r_A = r_{\min}$. Jest to stan niezwiązany. Przykład: orbity komet nieperiodycznych



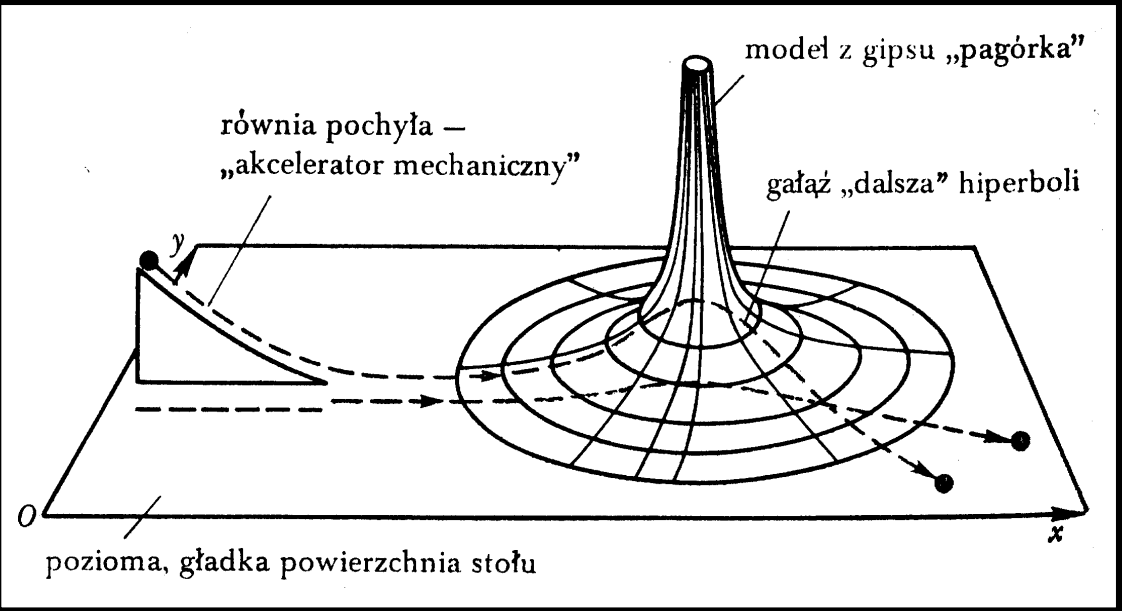


Orbity ciał o jednakowej masie m i jednakowej wartości momentu pędu L , lecz o różnych wartościach energii E względem centrum O siły przyciągającej

Ruch w polu $E_p(r) = kr^{-1}$ ($k > 0$, siła odpychająca)

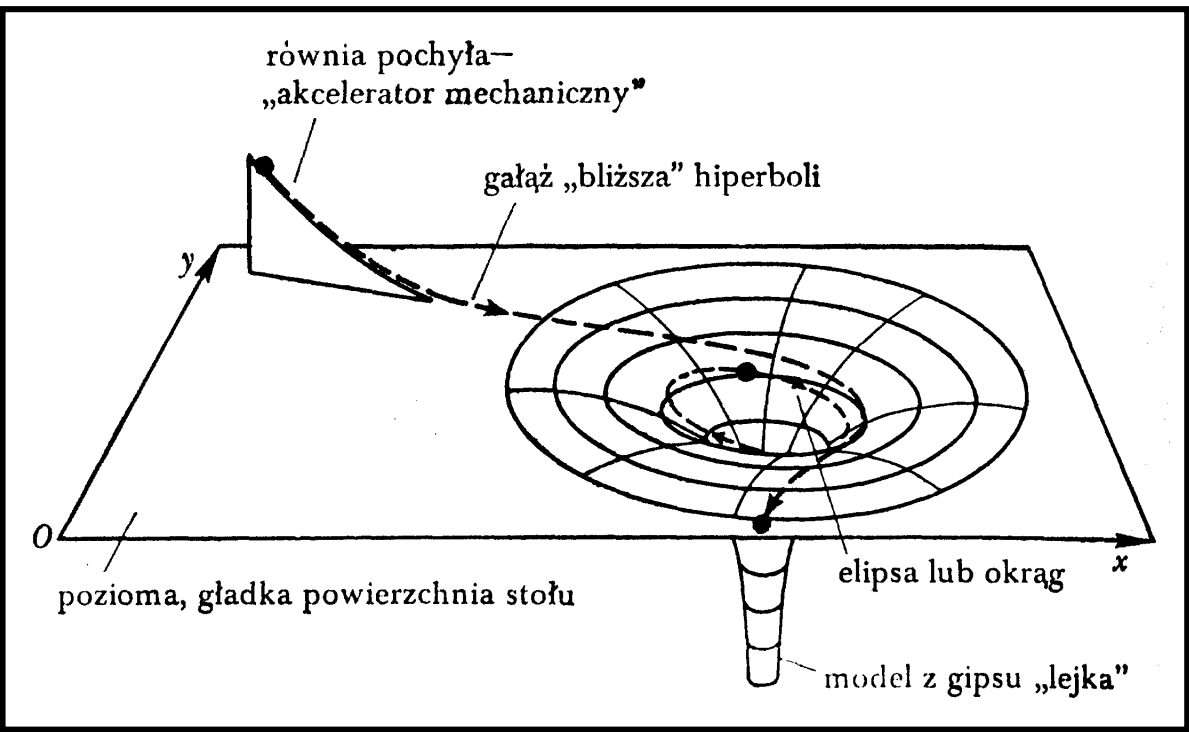


Przykład: rozpraszanie cząstek alfa na jądrach atomowych

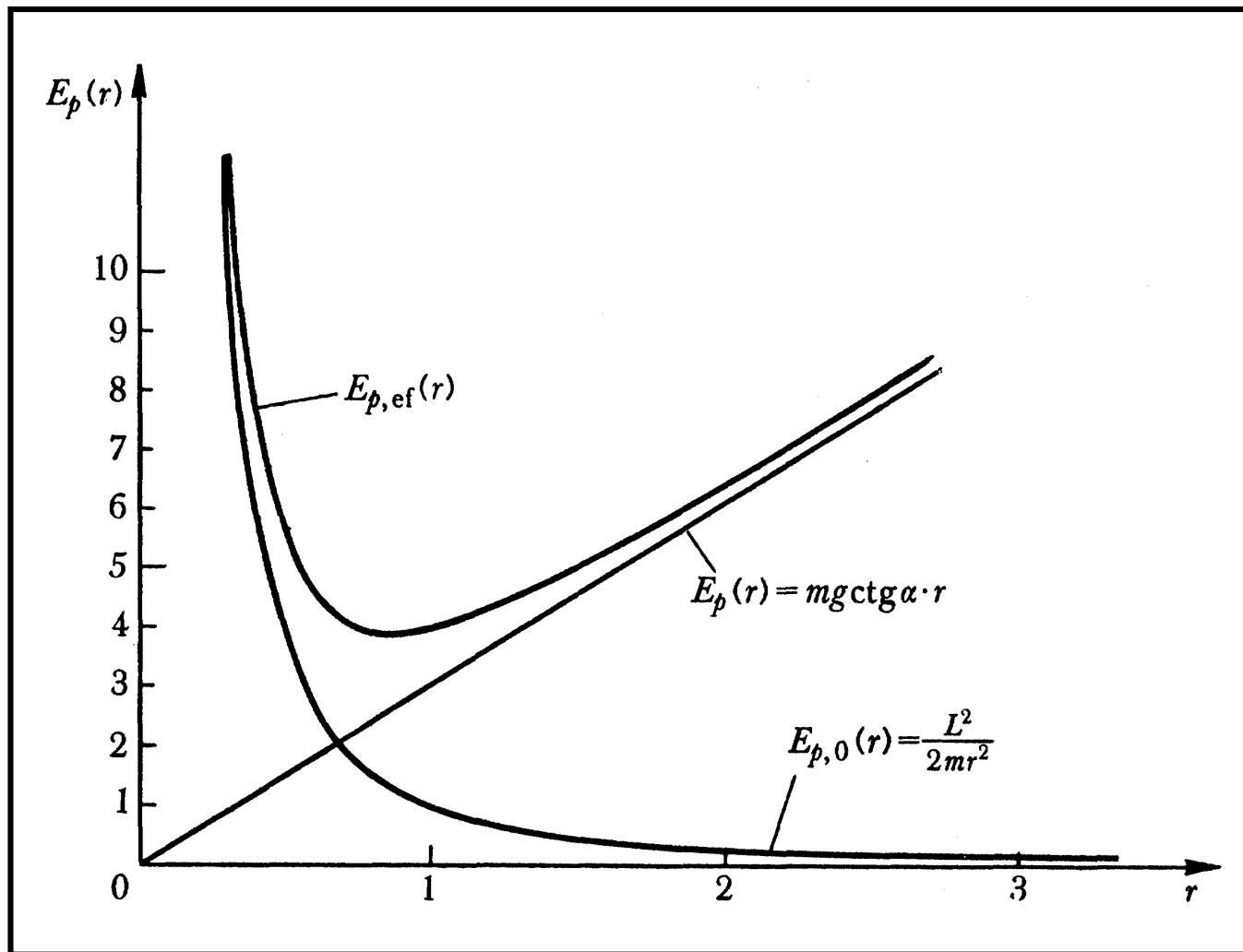
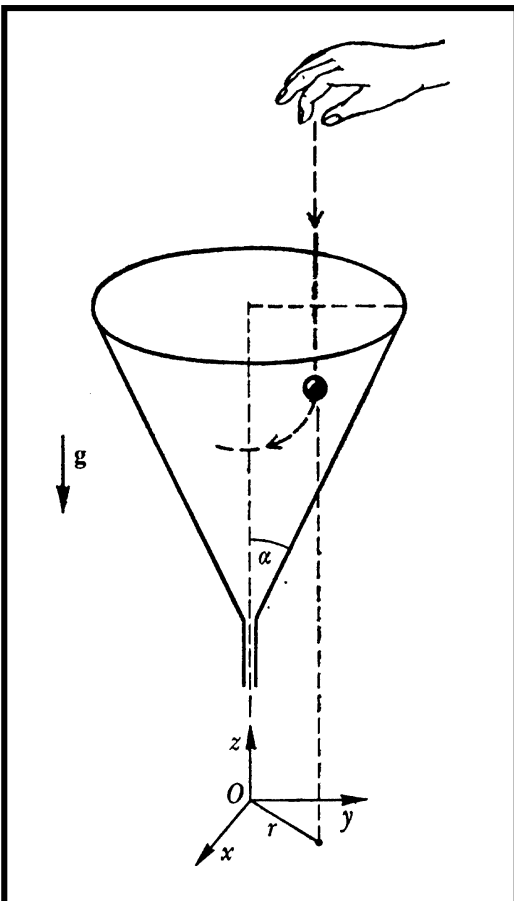


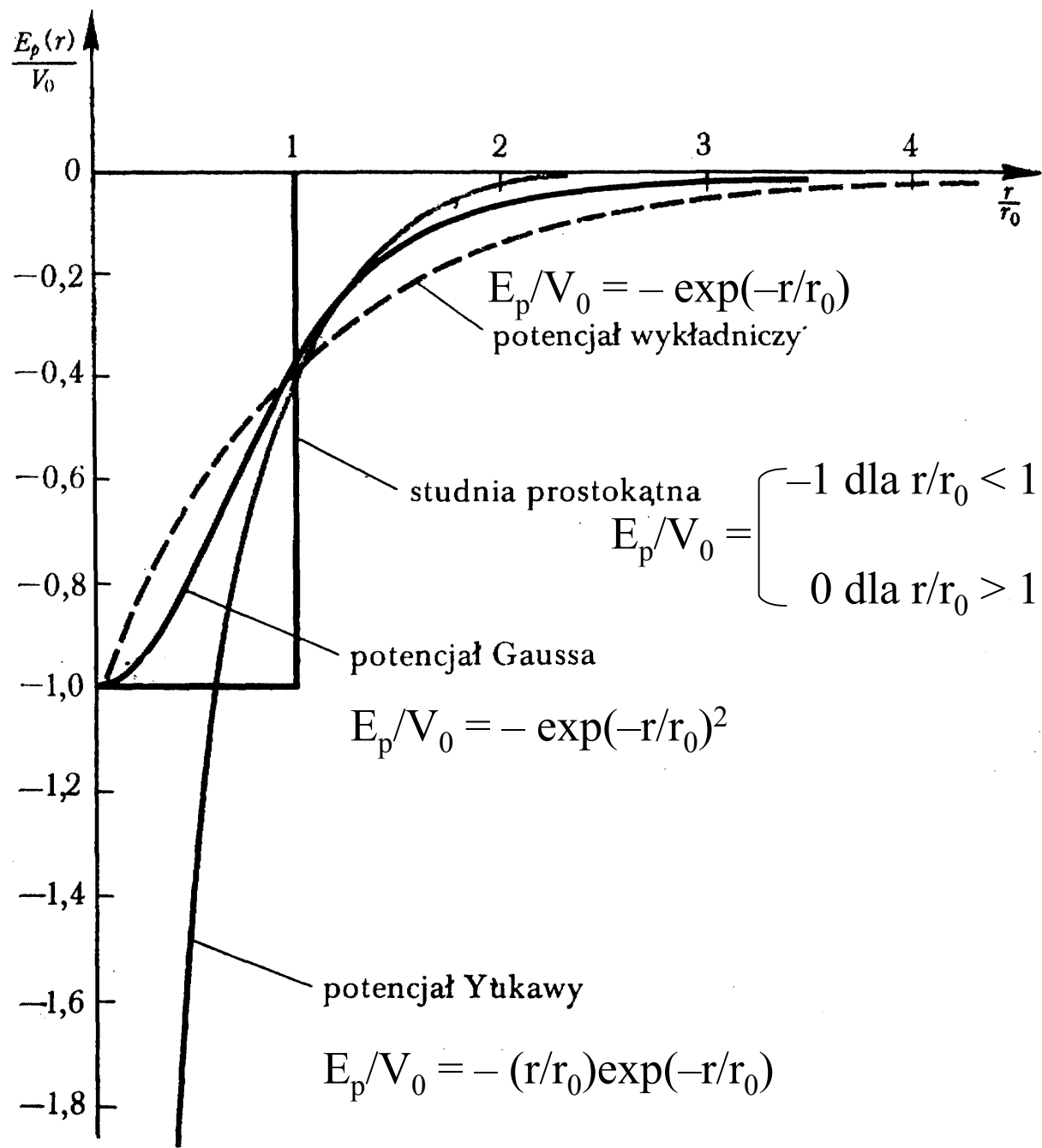
model potencjału
odpychającego typu kr^{-1}
($k > 0$)

model potencjału
przyciągającego
typu $-kr^{-1}$
($k > 0$)

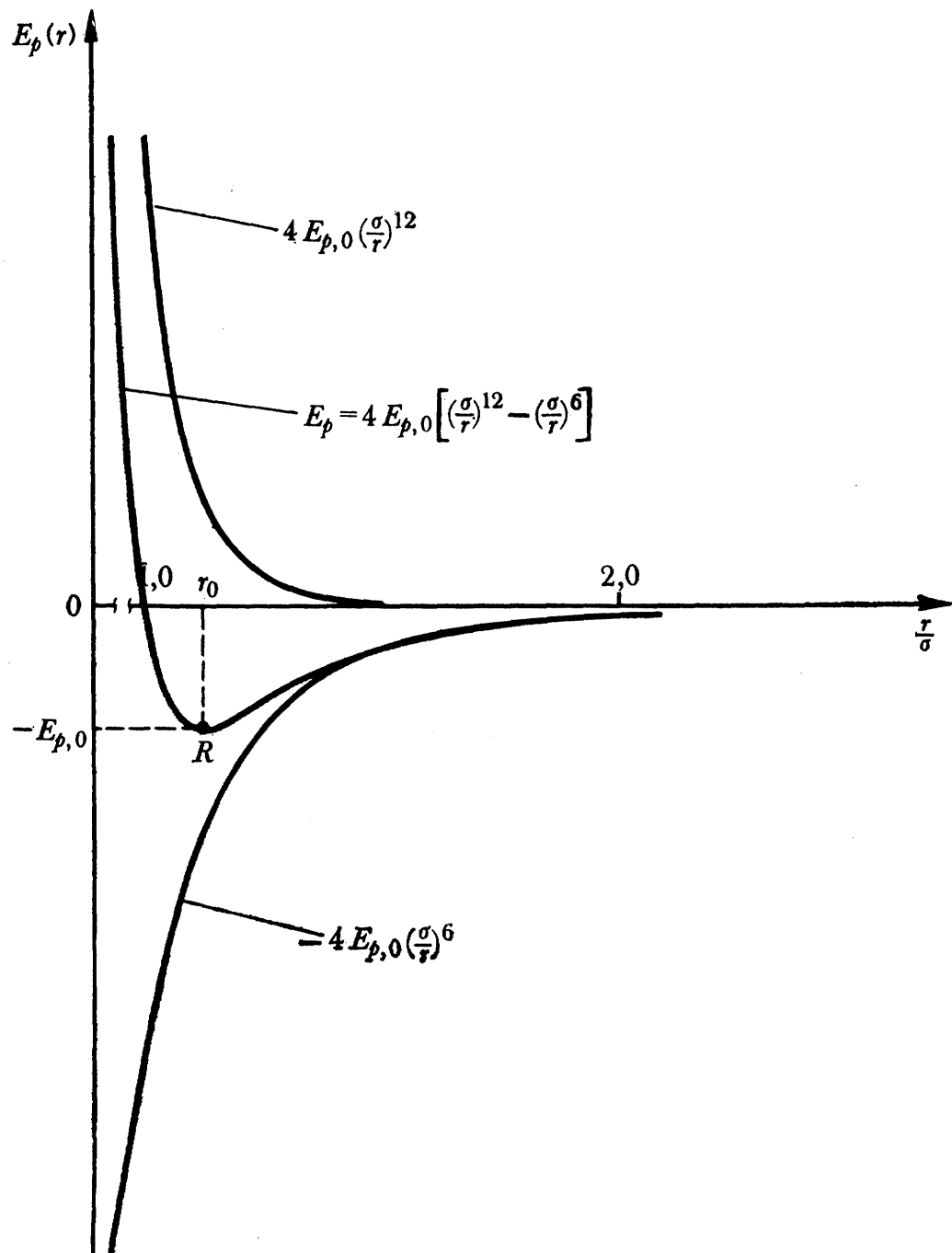


Przykład: ruch kulki w lejku o kącie rozwarcia α

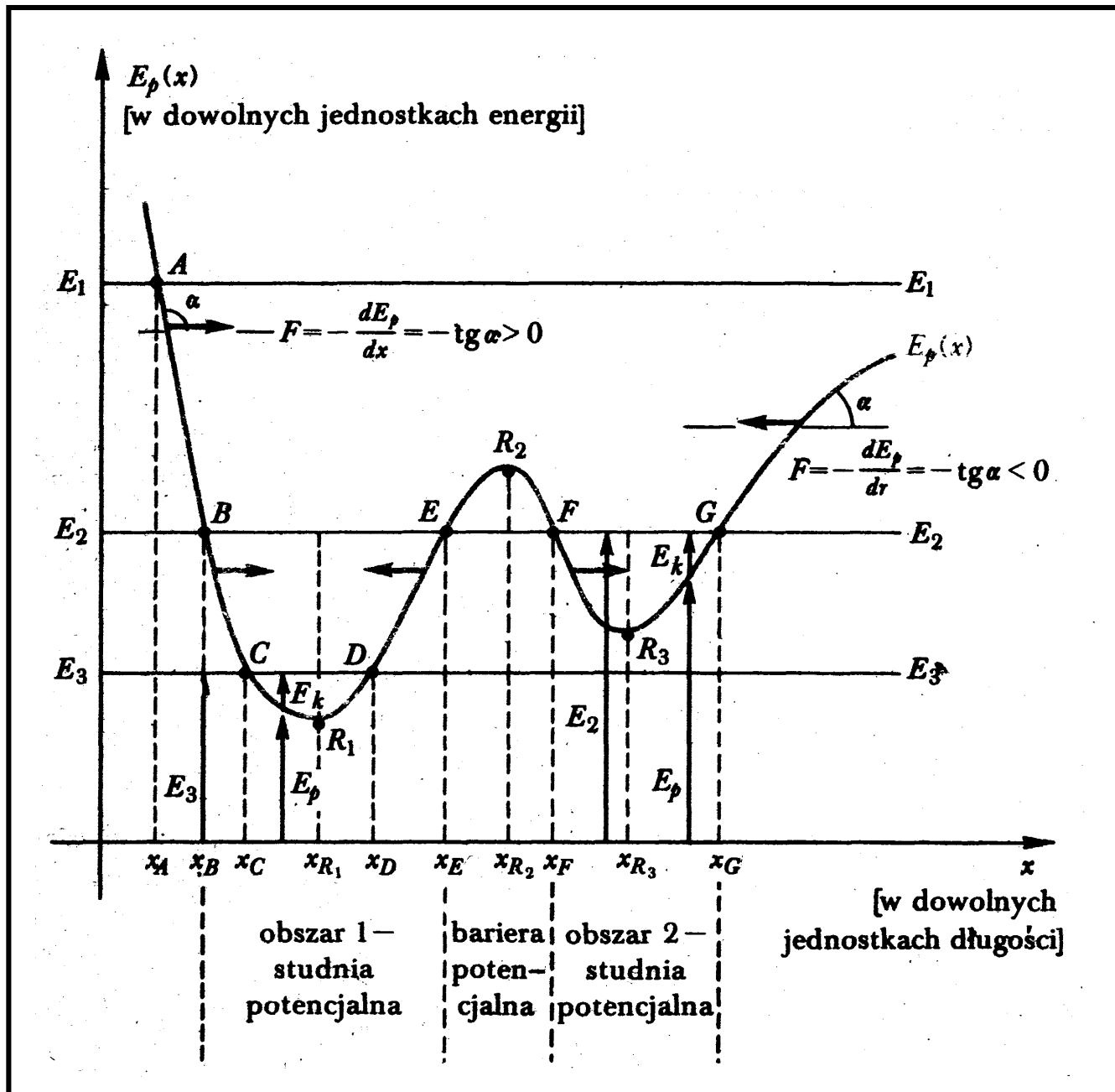




różne typy
 potencjałów
 przyciągających



Potencjał Lennarda-Jonesa
oddziaływania między
cząsteczkami
(sił Van der Waalsa)



Energia i pęd w teorii relatywistycznej

Związek między pędem i siłą

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^v \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^v \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) d\mathbf{r} = \int_0^v v d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2 = \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 \end{aligned}$$

$E = m_0 c^2$ - energia spoczynkowa
$E = mc^2$ - energia całkowita

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right)$$

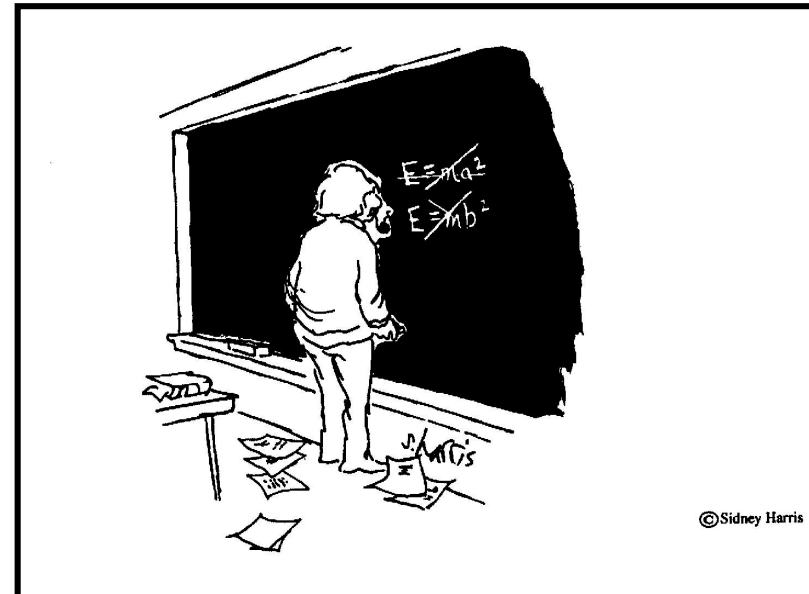
$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \text{dla } v \ll c$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{3}{8} \frac{p^4}{m_0^3 c^2} + \dots \approx \frac{p^2}{2m_0}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \Rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - m_0^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 = m_0^2 c^4$$

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4}$$



Transformacja energii i pędu

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad \text{niezmiennik}$$

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 - \frac{E'^2}{c^2}$$

Podobieństwo do transformacji Lorentza współrzędnych i czasu

$p_x \rightarrow x$, $p_y \rightarrow y$, $p_z \rightarrow z$, $E/c \rightarrow ct$

$$p_x' = \gamma (p_x - VE/c^2)$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

$$E' = \gamma (E - Vp_x)$$

Do tych wzorów można dojść
na podstawie transformacji
prędkości

Ze wzorów $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$ oraz $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ można otrzymać

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}} \quad \Rightarrow \quad \log v = \log c + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2} \right)$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0^2 c^4}{E^2 - m_0^2 c^4} \frac{dE}{E} \cong \frac{m_0^2 c^4}{E^2} \frac{dE}{E}$$

Dla bardzo dużych energii $E \gg m_0 c^2$, zatem można nadawać ciału coraz większą energię nie zwiększając praktycznie jego prędkości.

W podobny sposób można otrzymać $\frac{dE}{E} = \frac{p^2}{m_0^2 c^2 + p^2} \frac{dp}{p}$

i dla ultrawysokich energii $dE/E \cong dp/p$

Dla cząstek o $m_0 = 0$ (fotony) $E = pc = h\nu$
czyli $p = h\nu/c$