Matematyka III 2019/20Z
Całki krzywoliniowe

Zad. 1. Znaleźć parametryzację krzywej otrzymanej z przecięcia powierzchni
a. $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ i $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
b. $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ i $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1\}$
c. $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ i $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
Odpowiedź: a. $\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1 - \cos\varphi - \sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; *b.* $\vec{r}(t) = (\frac{1-t^2}{2}, t, \frac{1+t^2}{2})$, $t \in \mathbb{R}$; *c.* $\vec{r}(\varphi) = (\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+(\cos\phi+\sin\phi)^2}}, \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+(\cos\phi+\sin\phi)^2}}, \frac{-\cos\varphi-\sin\varphi}{\sqrt{1+(\cos\phi+\sin\phi)^2}})$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Zad. 2. Znaleźć parametryzację krzywej w $\mathbb{R}^3$ powstałej z przecięcia płaszczyzny $z = 0$ z prostymi stycznymi do helisy $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Odpowiedź: $\vec{p}(u) = (\cos u + u\sin u, \sin u - u\cos u, 0)$, $u \in \mathbb{R}$

Zad. 3. Znaleźć długość spirali logarytmicznej zadanej parametryzacją $\vec{r}(u) = (\mathrm{e}^u \cos u, \mathrm{e}^u \sin u)$ dla $u \in (-\infty, 0]$.
Odpowiedź: $\sqrt{2}$

Zad. 4. Znaleźć całkowitą masę i całkowitą energię potencjalną cienkiego, jednorodnego sznura o gęstości liniowej λ zwisającego w kształcie krzywej o równaniu $y = \frac{1}{k}\cosh(kx)$, $x \in [-a,a]$, $k > 0$ w jednorodnym polu grawitacyjnym o potencjale $\phi(\vec{r}) = gy$.
Odpowiedź: $m = \frac{2\lambda}{k}\sinh(ka)$, $E = \frac{\lambda g}{k}(a + \frac{\sinh(2ka)}{2k})$

Zad. 5. Obliczyć całkę $\int_\gamma x\sqrt{x^2 - y^2}\mathrm{d}s$ gdzie γ jest połową lemniskaty Bernoulliego zadaną przez $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$.
Odpowiedź: $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

Zad. 6. Znaleźć parametryzację krzywej zakreślanej przez punkt leżący na obwodzie koła o promieniu 1 toczącego się bez poślizgu po prostej $y = 0$ (cykloida). Wykorzystując znalezioną parametryzację, znaleźć długość łuku cykloidy i pole powierzchni pod łukiem (licząc całkę $\int_\gamma y\mathrm{d}x$).
Odpowiedź: $(x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$; $L = 8$, $S = 3\pi$

Zad. 7. Wyznaczyć bezpośrednim rachunkiem całkę $\int_\gamma \omega$ dla $\omega = (y - x)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ oraz krzywej γ będącego półokręgiem $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \ge 0\}$ (wybrać jedną z orientacji). Obliczyć tą samą całkę dla K będącego półokręgiem $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \le 0\}$ oraz odcinkiem $[-1,1] \times \{0\}$.
Odpowiedź: we wszystkich przypadkach $\int_\gamma \omega = 0$

Zad. 8. Obliczyć całkę $\int_\gamma x\mathrm{d}y$ dla krzywej γ będącej brzegiem trójkąta utworzonego przez osie układu współrzędnych i prostą $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a, b > 0$.
Odpowiedź: $\frac{1}{2}ab$.

Zad. 9. Znaleźć potencjały dla 1-form (jeśli istnieją): $\omega_1 = 3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$, $\omega_2 = \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, $\omega_3 = \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, $\omega_4 = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + (\frac{e^y}{1+x^2}+1)\mathrm{d}y$
Odpowiedź: Np. $\omega_1 = \mathrm{d}(x^3y)$, $\omega_2 = \mathrm{d}(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2))$, $\omega_3 = \mathrm{d}(\arctan\frac{y}{x})$, $\omega_4 = \mathrm{d}(\frac{1-e^y}{1+x^2}+y)$.

Całki powierzchniowe

Zad. 10. Obliczyć pole powierzchni czaszy kulistej $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq a\}$, $a \in (-R,R)$.
Odpowiedź: $4\pi R(R-a)$

Zad. 11. Obliczyć pole powierzchni wycięte ze sfery $x^2+y^2+z^2 = R^2$ walcem $x^2+y^2 = Rx$ (tzw. powierzchnia Vivianieniego).
Odpowiedź: $2R^2(\pi-2)$

Zad. 12. Obliczyć pole powierzchni wycięte z walca $x^2+y^2 = Rx$ sferą $x^2+y^2+z^2 = R^2$ (powierzchnia boczna bryły Vivianieniego).
Odpowiedź: $4R^2$

Zad. 13. Znaleźć wzór na pole powierzchni powierzchni otrzymanej przez obrót wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ wokół osi x. (Można założyć $f(x) \geq 0$.)
Odpowiedź: $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$

Zad. 14. Niech powierzchnia $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0\}$ będzie zorientowana 'na zewnątrz'. Obliczyć $\iint z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
Odpowiedź: $\frac{2}{3}\pi R^3$

Zad. 15. Obliczyć strumień pól $\vec{V_1} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, $\vec{V_2} = x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ przez powierzchnię $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = a, x,y,z \geq 0\}$, $a > 0$ zorientowaną tak, że wektor normalny ma dodatnie składowe w kierunkach x,y,z.
Odpowiedź: $\iint \vec{V_1}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}a^3$, $\iint \vec{V_2}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{4}a^4$

Zad. 16. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzić wzór Greena dla jednoformy $\omega = \frac{\mathrm{d}x}{1+y} + x\mathrm{d}y$ całkowanej po brzegu trójkąta o werzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$ i $(2,1)$.

Zad. 17. Korzystając ze wzoru Greena, znaleźć pole powierzchni pętli liścia Kartezjusza, tj. obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą wyznaczoną równaniem $x^3+y^3 = 3axy$. (Wskazówka: po podstawieniu do równania $y = tx$ możemy znaleźć parametryzację krzywej $(x,y) = (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$; fragment krzywej ograniczający powierzchnię jest dany przez $0 \leq t < \infty$. Pole powierzchni najłatwiej liczy się ze wzoru $S = \frac{1}{2}\oint_K(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$)

Zad 18. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzić wzór Stokesa dla jednoformy $\omega = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$ całkowanej po brzegu powierzchni $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$

$z = 2xy, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 0$.

Zad 19. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzić wzór Gaussa dla strumienia pola $\vec{A} = xz\vec{e_x} + yz\vec{e_y} + \vec{e_z}$ przez pełną powierzchnia stożka $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
Odpowiedź: Obie całki mają wartość $\frac{\pi}{6}$

Potencjał wektorowy

Zad 20. Znaleźć, jeśli istnieje, przykładowy potencjał wektorowy dla pola $\vec{A} = xy^2\vec{e_x} + (3yz^2 - y^3)\vec{e_y} + (2y^2z - z^3)\vec{e_z}$.
Odpowiedź: Np. $\vec{A} = \vec{\nabla} \times ((yz^3 - y^3z)\vec{e_x} - xy^2z\vec{e_y})$

Krzywoliniowe układy współrzędnych

Wzory: dla $\vec{t_a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a}$, $\vec{A} = A^a\vec{t_a}$, $g_{ab} = \vec{t_a} \cdot \vec{t_b}$ *mamy*

$$\vec{\nabla} f = \vec{t_a} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{t_a} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{abc} \frac{\partial}{\partial u^b}(g_{cd}A^d)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a}(\sqrt{\det g} A^a)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a}(\sqrt{\det g} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b})$$

Zad 21. Wykorzystując wzór na gradient i rotację w sferycznym układzie współrzędnych, rozstrzygnąć kiedy pole wektorowe $\vec{A} = \frac{\cos\theta}{r^3}\vec{t_r} + A^\theta(r, \theta)\vec{t_\theta}$ ma potencjał skalarny i znaleźć ten potencjał kiedy istnieje.
Odpowiedź: Potrzeba $A^\theta(r, \theta) = \frac{\sin\theta}{2r^4}$*; wtedy* $\vec{A} = \vec{\nabla}(-\frac{\cos\theta}{2r^2})$

Zad 22. Wykorzystując wzór na dywergencję i rotację w sferycznym układzie współrzędnych, rozstrzygnąć kiedy pole wektorowe $\vec{A} = f(r)\vec{t_r}$ ma potencjał wektorowy, i znaleźć przykładowy potencjał wektorowy kiedy istnieje.
Odpowiedź: Potrzeba, by $f(r) = \frac{c}{r^2}$. *Wtedy np.* $\vec{A} = \vec{\nabla} \times (-\frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\vec{t_\varphi})$

Zad 23. Znaleźć wzory na laplasjan w cylindrycznym i sferycznym układzie współrzędnych.

Zad 24. Znaleźć wzór na laplasjan w układzie współrzędnych danym przez $x = 2uv\cos\varphi$, $y = 2uv\sin\varphi$, $z = u^2 - v^2$.

Funkcje zmiennej zespolonej

Uwaga: w każdym zadaniu przyjąć, że funkcje $\ln z$ *i* z^α, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ *mają nieciągłość tam gdzie* $\arg z$ *ma nieciągłość.*

Zad 25. Znaleźć zbiór punktów nieciągłości funkcji $f(z) = (\ln z)^{\frac{3}{2}}$ Porównać przypadki gdy $\arg z \in [0, 2\pi)$ oraz $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Znaleźć granicę funkcji po obu stronach linii nieciągłości.

Zad 26. Znaleźć zbiór punktów nieciągłości funkcji $f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ Porównać przypadki gdy $\arg z \in [0, 2\pi)$ oraz $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Znaleźć granicę funkcji po obu stronach linii nieciągłości.

Zad 27. Porównać wynik poprzedniego zadania z sytuacją, gdy funkcja f jest zdefiniowana jako $f(z) = (z-1)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

Zad 28. Sprawdzić z definicji, czy podane funkcje są różniczkowalne w sensie zespolonym w punkcie $z_0 = 0$ i poza nim:

- $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2$
- $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$

Zad 29. Sprawdzić z twierdzenia Cauchy'ego-Riemanna, czy podane funkcje są różniczkowalne w sensie zespolonym, znaleźć pochodną, jeśli istnieje:

- $f(x + \mathrm{i}y) = (x^2 + 3xy^2) + \mathrm{i}(2xy + y^3)$
- $f(x + \mathrm{i}y) = (x^2 - y^2 + y) + \mathrm{i}(2xy - x)$
- $f(x + \mathrm{i}y) = \sinh x \cos y + \mathrm{i} \cosh x \sin y$

Zad 30. Sprawdzić poprzez liczenie lapalsjanu czy podane funkcje mogą być częścią rzeczywistą jekiejś funkcji holomorficznej, jeśli tak, znaleźć tą funkcję poprzez wykorzystanie warunków Cauchy'ego-Riemanna:

- $P(x, y) = y - x$
- $P(x, y) = xy - x$
- $P(x, y) = \sin x - \sin y$
- $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$

Zad 31. Policzyć całkę krzywoliniową z danej funkcji zespolonej, po danej krzywej:

- $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$
- $f(z) = z^3$, krzywa jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach 0, 1 i $1 + \mathrm{i}$

- $f(z) = \frac{1}{z^2}$, krzywa jest złożona z półprostej $(-\infty, -1] \times \{0\}$, półokręgu od $z = -1$ do $z = 1$ leżącego w górnej części płaszczyzny zespolonej i półprostej $[1, \infty) \times \{0\}$

Wzory Cauchy'ego, szereg Taylora i Laurenta

Zad. 32. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego, policzyć całki

- $I = \oint_K \frac{z^5}{z^2-1} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 2$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K z \tan(\pi z) \, \mathrm{d}z$, K: brzeg prostokąta $[0, n] \times [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$

Zad. 33. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnych, policzyć całki

- $I = \oint_K \frac{z^5}{(z-1)^3} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 2$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\cos z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\mathrm{e}^{2z}}{z \sin z} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 4.

Zad. 34. Rozwinąć podaną funkcję w szereg Taylora wokół podanego punktu i znaleźć jego promień zbieżności. Zaznaczyć obszar zbieżności na płaszczyźnie zespolonej.

- $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 3 + 2\mathrm{i}$
- $f(z) = \frac{1}{(z-2\mathrm{i})^2}$, $z_0 = 1 - \mathrm{i}$
- $f(z) = \log z$, $z_0 = \mathrm{i}$
- $f(z) = \sqrt{z+1}$, $z_0 = \mathrm{i}$

Zad. 35. Znaleźć obszar zbieżności szeregów Laurenta

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n (z - z_0)^n$ w zależności od q
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{|n|} (z - z_0)^n$ w zależności od q
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh n} z^n$

Zad. 36. Dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta

- wokół $z_0 = 0$ dla $0 < |z| < 1$
- wokół $z_0 = 0$ dla $1 < |z| < 2$
- wokół $z_0 = 0$ dla $2 < |z|$
- wokół $z_0 = 1$ dla $0 < |z - 1| < 1$
- wokół $z_0 = 1$ dla $1 < |z - 1|$

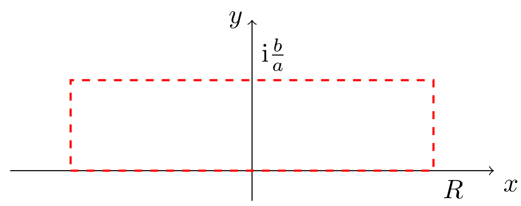
Residua

Zad. 37. Znaleźć residua podanych funkcji w podanym punkcie.

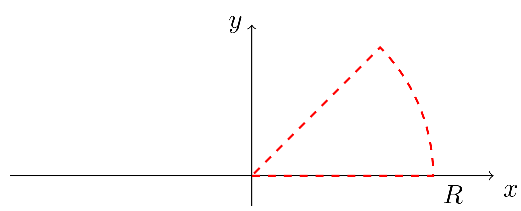
- $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = \infty$
- $f(z) = \frac{1}{(z^{20}-1)(z-3)}$, $z_0 = 3$, $z_1 = \infty$
- $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $z_0 = n\pi$
- $f(z) = \tan z$, $(z_0 = n + \frac{1}{2})\pi$
- $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$, $z_0 = 0$
- $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$, $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = \infty$
- $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0 = \mathrm{i}$, $z_1 = -\mathrm{i}$
- $f(z) = \frac{1}{z(1-\cos z)}$, $z_0 = 0$
- $f(z) = \frac{1}{1-\frac{z^2}{2}-\cos z}$, $z_0 = 0$
- $f(z) = \frac{1}{(\mathrm{e}^z-1)^3}$, $z_0 = 0$

Zastosowania do liczenia całek rzeczywistych

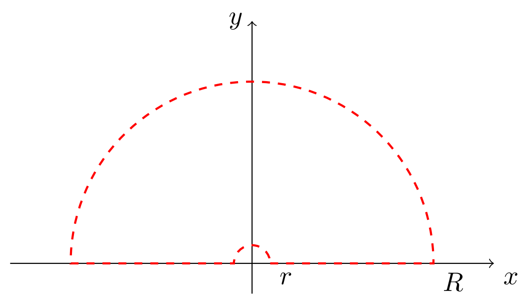
Zad. 38. Licząc całkę $\oint_\gamma \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z$, $a > 0$ po konturze naszkicowanym poniżej, znaleźć wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(2bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2-2\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x$



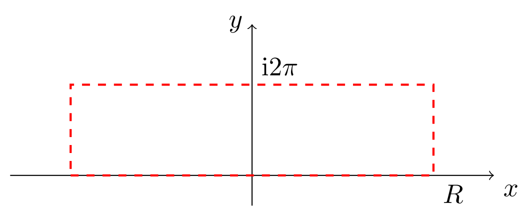
Zad. 39. Licząc całkę $\oint_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$ po konturze naszkicowanym poniżej, znaleźć wartość całki $\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$



Zad. 40. Licząc całkę $\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz$ po konturze naszkicowanym poniżej, znaleźć wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$



Zad. 41. Licząc całkę $\oint_\gamma \frac{e^{az}}{1+e^z} dz$ po konturze naszkicowanym poniżej, znaleźć wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$



Zad. 42. Wykorzystując całkę zespoloną po okręgu, policzyć całki

- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\varphi} d\varphi$, $|a| > |b|$
- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{1-2p\cos\varphi+p^2} d\varphi$, $|p| < 1$
- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\frac{5}{4}+\cos\varphi)^2} d\varphi$

Zad. 43. Wykorzystując całkę zespoloną po półkolu, policzyć całki

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| \neq |b|$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$, $a \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2+a^2} dx$, $a, k \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^2+x+1} dx$

Zad. 44. Wykorzystując całkę zespoloną po 'dziurce od klucza', policzyć całki

- $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x+4)}\mathrm{d}x$
- $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$
- $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$
- $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x$
- $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2(x+2)}\mathrm{d}x$
- $\int_0^\infty \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

Analiza fourierowska

Zad. 45. Definicje podanych funkcji należy traktować jako zadanie funkcji okresowej z okresem 2π. Znaleźć rozwinięcie tych funkcji w szereg Fouriera w postaci wykładniczej i w postaci trygonometrycznej. Czy szereg Fouriera jest wszędzie zbieżny do podanej funkcji?

- $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, $f(\pi) = f(-\pi) = 0$
- $f(x) = x$ dla $x \in [0, 2\pi)$
- $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$
- $f(x) = x$ dla $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \pi$ dla $x \in (\pi, 2\pi)$
- $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dla $x \in [-\pi, \pi)$
- $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$

Zad. 46. Wykorzystując szereg Fouriera funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$, policzyć szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Zad. 47. Wykorzystując szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$ w punkcie $x_0 = \pi$, policzyć szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Zad. 48. Wykorzystując szereg Fouriera funkcji $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$, policzyć szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Zad. 49. Wykorzystując wzór Parsevala dla funkcji $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dla $x \in [-\pi, \pi)$, policzyć szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2+\alpha^2}$.

Zad. 50. Wykorzystując wzór Parsevala dla funkcji $f(x) = x(x-\pi)(x+\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dla $x \in [-\pi, \pi]$, policzyć szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^6}$.

Zad. 51. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

- $f(x) = 1$ dla $|x| < a$, $f(x) = 0$ dla $|x| > a$

- $f(x) = 1 - |x|$ dla $|x| \le 1$, $f(x) = 0$ dla $|x| > 1$
- $f(x) = \cos x$ dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ dla $x > 0$, $f(x) = 0$ dla $x < 0$; $a > 0$
- $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$
- $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ dla $x > 0$, $f(x) = -\mathrm{e}^{ax}$ dla $x < 0$; $a > 0$
- $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$ - można skorzystać z wyniku zad 37.
- $f(x) = x\mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$
- $f(x) = \frac{1}{\cosh(ax)}$ - trzeba użyć podstawienia $t = e^{ax}$ i skorzystać z całki po dziurce od klucza

Zad. 52. Zapisać za pomocą dystrybucji $\delta(x)$, pochodnych $\delta(x)$ i $\theta(x)$ podane funkcjonały liniowe i znaleźć ich transformaty Fouriera.

- $T : f \mapsto \sum_{n=-N}^{N} f(n)$, $N \in \mathbb{N}$
- $T : f \mapsto \sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(0)$, $N \in \mathbb{N}$
- $T : f \mapsto \int_a^b f(x)dx$, $a, b \in \mathbb{R}$

Zad. 53. Obliczyć całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{e}^x - \sqrt{3}) \frac{1}{\cosh x} \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\mathrm{e}^x - \sqrt{3}) \frac{1}{\cosh x} \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(1 - x^2) \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1 - x^2) \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(1 - x^2) \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(y^2 - yx) \frac{x^2 + xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Zad. 54. Pokazać, że dla dowolnej funkcji gładkiej g zachodzi

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x)$$

Zad. 55. Znaleźć rozwiązanie równania

$$f'(x) + af(x) = \delta(x)$$

Zad. 56. Znaleźć, jakie relacje muszą spełniać parametry $A_1, A_2, B, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aby funkcja $f(x) = \left(A_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + A_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\right)\theta(-x) + B\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\theta(x)$ spełniała równanie

$$-f''(x) + \theta(x)f(x) = Ef(x), \qquad E > 1$$