Zadania domowe z mechaniki statystycznej
do wykładu prof. Marka Napiórkowskiego
Seria 8

Zadanie 1. Znaleźć ciepło właściwe w modelu Einsteina ciała stałego składającego się z N trójwymiarowych, kwantowych oscylatorów harmonicznych, każdy z pośród których drga z częstością ω.

Zadanie 2. Na prostej umieszczonych jest w równych odległościach N spinów. Każdy spin może przyjmować trzy wartości: $s_i \in \{-1, 0, 1\}$. Hamiltonian układu ma postać:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N} |s_i - s_{i+1}|,$$

gdzie przyjęto okresowe warunki brzegowe $s_{N+1} = s_1$. W układzie dopuszczalne są tylko konfiguracje spinów dla których dla każdego i

$$|s_i - s_{i+1}| \leqslant 1.$$

Warunek ten można potraktować jako żądanie by konfiguracjom sąsiednich spinów, dla których $|s_i - s_{i+1}| = 2$ odpowiadała nieskończona energia. Korzystając z metody macierzy przejścia wyznaczyć związek podsawowy w reprezentacji energii swobodnej Helmholtza oraz ciepło właściwe tego układu.

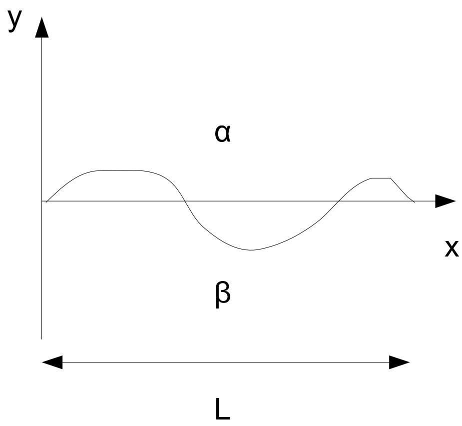
Zadanie 3. Rozważmy dwuwymiarowy układ $L \times \infty$, w którym dwie fazy α i β oddzielone są powierzchnią rozdziału faz opisaną przez funkcję $y = h(x)$. energia powierzchni rozdziału faz jest proporcjonalna do długości powierzchni $\mathcal{L}$ pomniejszonej o jej najkrótszą możliwą długość L:

$$\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{L} - L),$$

gdzie $\sigma = const > 0$ - współczynnik napięcia powierzchniowego.

a) Wyrazić $\mathcal{L}$ jako funkcjonał $h(x)$ i zapisać $\mathcal{H}$ jako funkcjonał h, tzn $\mathcal{H}[h]$. Jaką postać przyjmuje $\mathcal{H}[h]$ gdy pofałdowanie powierzchni rozdziału faz jest małe, czyli gdy $\left|\frac{dh}{dx}\right| << 1$.

Dalej będziemy rozważać tylko taką sytuację.



Rysunek 1: Rysunek do zadania 3

b) Na powierzchnię rozdziału faz nakładamy warunki brzegowe $h(0) = h(L) = 0$. Wtedy można zapisać:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{L}),$$

gdzie $A_n \in \mathbb{R}$ - współczynniki rozwinięcia. Pokazać, że w przypadku małych pofałdowań:

$$\mathcal{H}[h] = \mathcal{H}[A_n] = \frac{\sigma\pi^2}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2.$$

Obliczyć $< A_n >$ oraz $< A_n A_m > - < A_n >< A_m >$.

nadobowiązkowe) Osoby zaznajomione z pojęciem całek po trajektoriach mogą obliczyć sume statystyczną:

$$Z = \int \mathcal{D}h e^{-\beta\mathcal{H}[h]}.$$

Rozwiązania zadań podpisane własnym imieniem i nazwiskiem, każde na osobnej kartce papieru, proszę przygotować **na wtorek 9.12.2008r.** Rozwiązanie wybranego zadania zbierane będzie na początku ćwiczeń.

przygotował Adam Wójtowicz