

Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

semestr letni 2023-24

Krzysztof Byczuk

Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, UW
byczuk@fuw.edu.pl
www.fuw.edu.pl/ byczuk

Radosław Przeniośło

Instytut Fizyki Doświadczalnej, Wydział Fizyki, UW
radek@fuw.edu.pl

21-04-2024

Ćwiczenia:

dr Grzegorz Łach
dr Krzysztof Myśliwy

Pokazy:

dr Krzysztof Karpierz
mgr Anita Gardias

Warunki zaliczenia

- Zaliczenie w pierwszym terminie

1. Prace domowe, 1 na tydzień losowo wybrane z serii za 2p.
2. Kolokwium, 8 kwietnia, 2024, sala 1.01, 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
3. Kolokwium, 27 maj 2024, sala 1.01, 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
4. Egzamin, 19 czerwca 2024, sala 1.01, 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.

- Zaliczenie poprawkowe

1. Egzamin pisemny poprawkowy
2. Egzamin ustny poprawkowy, możliwość poprawy oceny w drugim terminie

Wypadkowa ocena na podstawie zebranej liczby punktów w każdym ze sposobów zaliczania po unormowaniu do 100 :

5+ za 99-100p.,
5 za 90-98p.,
4+ za 81-89p.,
4 za 72-80p.,
3+ za 62-71.,
3 za 50-61p.,
2 za 0-49p.

Uwaga: punkty z zaliczenia w pierwszym terminie i poprawkowym nie sumują się.

1 Tydzień I, 26/02-04/03/2024

1.1 Wykład

I. Podstawy termodynamiki fenomenologicznej

§1. *Układy makroskopowe* - przykłady układów makroskopowych będących przedmiotem badań termodynamiki i fizyki statystycznej, definicja miary ilości materii w układzie jednostek SI, definicja jednego mola - jeden mol zawiera dokładnie $N_0 = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ elementów strukturalnych, stała Avogadro $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ 1/mol, przykłady 1 mola substancji.

§2. *Podstawowe pojęcia termodynamiki* - definicje stanu termodynamicznego (makrostanu), równowagi termodynamicznej, ekstensywnych i intensywnych zmiennych termodynamicznych, równanie stanu i proste przykłady, definicja funkcji stanu.

§3. *Zerowa zasada termodynamiki i temperatura empiryczna* - treść zerowej zasady termodynamiki, istnienie temperatury empirycznej jako konsekwencja zerowej zasady termodynamiki, skale temperatur i praktyczny jej pomiar, skala temperatur oparta na gazie doskonałym, ciśnienie i sposoby jego wyznaczania, jednostki ciśnienia.

§4. *Procesy termodynamiczne* - definicja procesu termodynamicznego, przykłady procesów z ustalonym parametrem, izoprocesy (izotermiczny, izochoryczny, izobaryczny, adiabatyczny, ...), procesy cykliczne, procesy infinytezymalne, definicja procesu odwracalnego (w szerokim i wąskim sensie), procesy pseudostatyczne i kwazistatyczne.

1.2 Pokazy

1. Mole różnych pierwiastków (wraz z mołem gazu doskonałego).
2. Termometr gazowy (puszka z powietrzem + U-rurka z denaturatem)
3. Stalowa kulka + stalowa płyta z otworem (zimna się mieści a gorąca się nie mieści)
4. Termometr Galileusza
5. Punkt potrójny wody
6. Rozszerzalność ciał stałych, tj. dylatometr, bimetal
7. Ogrzewanie drutu żelaznego (nie-monotoniczna rozszerzalność termiczna)
8. zależność oporu właściwego od temperatury dla półprzewodnika i metalu
9. pirometr
10. termometr na podczerwień
11. kolba z tłokiem + dziurami + woda

12. wybijanie korka młotkiem + woda
13. zgniatanie puszkę z gotującą się wodą
14. przyrząd do pokazania zmiany ciśn hydrostat. z głębokoscia
15. pompa próżniowa + rękawiczka gumowa
16. pompa próżniowa + szklanka z wodą

1.3 Zadania na ćwiczenia

1. Na podstawie rocznego światowego wydobycia węgla w wysokości 175 eksadzili oszacować roczny przyrost stężenia CO_2 w atmosferze przy założeniu, że całe wydobycie jest spalane na bieżąco. Wynik wyrazić w ppm (cząsteczkach na milion).
2. Prawo Fouriera przewodnictwa cieplnego jednorodnego ośrodka ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad (1)$$

gdzie $T(r, t)$ to lokalna temperatura w ośrodku, Δ oznacza trójwymiarowy Laplasjan, zaś κ to odpowiedni współczynnik. Korzystając z twierdzenia Stokesa uzasadnić stąd prawdziwość tzw. prawo stygnięcia Newtona obiektu umieszczonego w dużym otoczeniu o temperaturze zewnętrznej T_e :

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = \alpha(T_e - \bar{T}) \quad (2)$$

gdzie \bar{T} to średnia temperatura obiektu, a α to pewien współczynnik.

3. Temperatura nad półprzestrzenią o współczynniku stygnięcia α zmienia się jak

$$T(t) = T_0 + A \cos \omega t. \quad (3)$$

Określić przebieg zmian temperatury na głębokości L . Wskazówka: wygodnie jest wyprowadzić odpowiednią postać prawa stygnięcia dla sąsiadujących cienkich pasków.

4. Oszacować wpływ rozszerzalności termicznej szkła na określenie skali termometru rtęciowego skonstruowanego ze sferycznej bańki szklanej połączonej z cienką rurką.

2 Tydzień II, 05-10/03/2024

2.1 Wykład

§5. *Praca, energia wewnętrzna, pierwsza zasada termodynamiki* - definicja infinitezymalnej pracy mechanicznej dW , praca jako różniczka (jednoforma, forma Pfaffa) niezupełna, przykłady wyrażeń na pracę w procesach odwracalnych, zmienne $x_i = V, N, \vec{M}, \vec{P}, \dots$ i siły $F_i = -p, \mu, \vec{H}, \vec{E}, \dots$ uogólnione oraz związana z nimi praca $dW = \sum_i F_i dx_i$, definicja ciepła dQ , definicja energii wewnętrznej $U = U(T, V, N, \dots)$ jako

ekstensywnej funkcji stanu, zasada zachowania energii w układzie izolowanym (nieistnienie perpetuum mobile pierwszego rodzaju), podukłady termodynamiczne w kontakcie, pierwsza zasada termodynamiki dla podukładu $dU = dW + dQ$, w procesach cyklicznych $\oint dU = W + Q = 0$, analiza ciepła w układzie jednościładnikowym w różnych zmiennych termodynamicznych, definicja pojemności cieplnej, pojemność cieplna przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu, definicja ciepła właściwego, analiza ciepła właściwego dla gazu doskonałego, równanie adiabaty dla gazu doskonałego.

§6. *II zasada termodynamiki* - obserwacje doświadczalne i konieczność wprowadzenia II zasady termodynamiki, różne sformułowania II zasady termodynamiki: Clausius, Kelvin, Planck i Ostwald. Nieistnienie perpetuum mobile II rodzaju.

§7. *Maszyny cieplne* - definicja silnika cieplnego i pompy cieplnej, definicja sprawności silnika cieplnego i pompy cieplnej, maszyny odwracalne i nieodwracalne, przykład cykl Carnota, twierdzenie Carnota o sprawności cyklicznego silnika odwracalnego, twierdzenie Kelvina o istnieniu termodynamicznej, absolutnej skali temperatur.

2.2 Pokazy

1. Silnik Stirlinga i żarówka.
2. Dwa sprzężone silnika Stirlinga, jeden w trybie pracy, drugi w trybie pompy cieplnej.

2.3 Zadania na ćwiczenia

1. Sprawdzić, czy forma Pfaffa

$$ye^{-z} dx + xe^{-z} dy - xye^{-z} dz$$

jest formą zupełną. Jeżeli tak, to znaleźć funkcję, której jest różniczką w R^3 .

2. Sklasyfikować formę Pfaffa

$$dQ = C_V dT + p dV.$$

Znaleźć czynnik całujący μ (t.j., $\mu dQ = dS$) przy założeniu, że p i V spełniają równanie stanu gazu doskonałego $pV = RT$ dla jednego mola, a pojemność cieplna C_V jest stała.

3. Wyprowadzić wyrażenie na pracę infinitezymalną dla a) dielektryka w polu elektrycznym, $dW = \vec{E} d\vec{P}$, b) magnetyka w polu magnetycznym, $dW = \vec{H} d\vec{M}$, oraz c) rozciąganego (ściskanego) pręta/gumy o polu przekroju A spełniającego prawo Hooke'a, $dW = AT dl$, gdzie T jest napięciem.
4. Niech $\{X_i\}$ będzie zbiorem parametrów ekstensywnych, a $\{y_i\}$ zbiorem parametrów intensywnych. Wtedy każda ekstensywna funkcja stanu A spełnia związek

$$A(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, y_1, y_2, \dots) = \lambda A(X_1, X_2, \dots, y_1, y_2, \dots),$$

a każda intensywna funkcja stanu a spełnia związek

$$a(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, y_1, y_2, \dots) = a(X_1, X_2, \dots, y_1, y_2, \dots),$$

dla $\lambda = 1, 2, \dots$. Pokazać, że te stwierdzenia zachodzą dla dowolnej liczby rzeczywistej $\lambda > 0$ przy warunku, że funkcje stanu są ciągłe.

5. Z zerowej zasady termodynamiki wiemy, że dla trzech ciał we wzajemnej równowadze zachodzą zależności

$$F_1(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0,$$

$$F_2(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0,$$

$$F_3(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0.$$

Za pomocą odpowiednich matematycznych przekształceń udowodnić, że związki te można sprowadzić do prostszej postaci

$$\Theta_1(p_1, V_1) = \Theta_2(p_2, V_2) = \Theta_3(p_3, V_3),$$

w której zmienne odnoszące się do poszczególnych ciał są rozdzielone.

6. Wyznaczyć zależność energii wewnętrznej U gazu van der Waalsa od temperatury T , objętości V i liczby moli n wiedząc, że dla jednego mola

$$U = \frac{3}{2}RT + \frac{a}{V}.$$

7. Czy rozprężanie gazu do próżni możemy przeprowadzić pseudo-statycznie? Jeżeli tak, to w jaki sposób? Czy będzie to proces kwazi-statyczny?
8. Czas, po którym układ przechodzi ze stanu nierównowagowego do stanu równowagi nazywamy czasem relaksacji. Niech czas relaksacji przy wytrąceniu układu z równowagi przez zmianę parametru a o małą wartość Δa wynosi τ . Jaki warunek musi być spełniony, aby proces polegający na zmianie w czasie parametru a zgodnie z zależnością $a = a(t)$ można było uznać za pseudo-statyczny?
9. Proces Joule'a-Thomsona polega na bardzo powolnym przeciskaniu gazu przez porowatą przegrodę z obszaru (1), gdzie utrzymywane jest ciśnienie p_1 , do obszaru (2) o ciśnieniu $p_2 < p_1$. Przy nieskończeniu dużej przegrodzie szybkość procesu jest nieskończenie mała. Czy jest to proces odwracalny? Czy jest to proces pseudo-statyczny?
10. W przypadku jednoatomowego gazu doskonałego energia wewnętrzna U w stanie o objętości V i ciśnieniu p wynosi

$$U = \frac{3}{2}pV.$$

Wykazać, że w odwracalnym procesie adiabatycznym przeprowadzonym nad takim gazem zachodzi związek

$$pV^\gamma = \text{const},$$

gdzie γ jest pewną stałą. Wyznaczyć pracę jaką należy wykonać nad takim gazem przy przeprowadzaniu go ze stanu (p_1, V_1) do stanu (p_2, V_2) na drodze adiabatycznej niekoniecznie odwracalnej.

11. Uogólnić wynik z wykładu $C_P = C_V + nR$ dla n moli gazu na dowolny prosty układ termodynamiczny na dwa sposoby:

$$C_P = C_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left\{ p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right\}; \quad (4)$$

$$C_P = C_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left\{ p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \right\}. \quad (5)$$

12. Dla gazu doskonałego o niezależnym od temperatury cieple właściwym C_v pokazać prawo adiabaty

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (6)$$

oraz obliczyć pracę jaką wykonuje ten gaz w dowolnej (niekoniecznie quasistatycznej) przemianie adiabatycznej ze stanu p_1, V_1 do stanu p_2, V_2 .

13. Zakładając że przemieszczanie się powietrza w atmosferze zachodzi quasistatycznie w sposób adiabatyczny, znaleźć postać zależności temperatury od wysokości, zaniedbując wpływ kondensacji pary. Przedyskutować jakościowo co się stanie jeżeli wilgotność jednak uwzględnimy.

2.4 Zadania domowe

Zbieramy 21 marca 2024r. na wykładzie.

1. Pokazać, że dla jednego mola gazu doskonałego o niezależnym od temperatury cieple właściwym przy stałej objętości c_v przy quasi-statycznym rozprężaniu adiabatycznym ze stanu (T_0, V_0) do dowolnej objętości V zachowana jest wielkość

$$\sigma = c_v \ln \frac{U}{U_0} + \frac{Q}{T_0} \quad (7)$$

gdzie U i U_0 oznaczają energię wewnętrzną w stanie końcowym i początkowym, odpowiednio, a Q jest ciepłem pobieranym podczas dokonywanego kwazistatycznie *izotermicznego* rozprężania tego gazu do tej samej końcowej objętości w temperaturze początkowej.

2. Rozważyć ponownie problem określenia temperatury na głębokości L pod powierzchnią gruntu gdy temperatura nad gruntem zmienia się jak

$$T(t) = T_0 + A \cos \omega t. \quad (8)$$

W tym celu zdyskretyzować równanie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

dzieląc grunt o grubości L na identyczne cienkie paski o grubości Δx oraz przybliżając temperaturę w pasku poprzez $T(x) \approx T_n$ a pochodne na

górnym brzegu przez $\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{n-1}-T_n}{\Delta x}$. Pokazać z twierdzenia Stokesa, że wtedy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\Delta x^2} (T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n). \quad (10)$$

(zaniedbać strumień przez boczne ścianki) Biorąc Ansatz

$$T_n = \lambda^n e^{i\omega t} \quad (11)$$

znaleźć równanie na λ i rozwiązać je w pierwszym nietrywialnym rzędzie w $\Delta x \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}}$. Wybrać to rozwiązanie, które charakteryzuje się malejąca amplitudą. Na koniec wziąć granicę $n \rightarrow \infty$ przy ustalonym L i sprawdzić, że spełnione jest równanie (9).

- Niech x będzie dowolną wielkością będącą funkcją stanu termodynamicznego układu którego stan równowagi jest zadany jednoznacznie przez podanie jego objętości molowej v i temperatury T . Wykazać, że molowe ciepło właściwe przy stałym x spełnia

$$c_x = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_x \quad (12)$$

3 Tydzień III, 11-17/03/2024

3.1 Wykład

§8. *Entropia i II zasada termodynamiki* - definicja ciepła zredukowanego, znikanie ciepła zredukowanego dla odwracalnego cyklu Carnota, uogólnienie na dowolny cykl odwracalny, matematyczne sformułowanie II zasady termodynamiki dla procesów odwracalnych, istnienie entropii jako funkcji stanu i jej związek z ciepłem i temperaturą $TdS = dQ$, sformułowanie I zasady termodynamiki dla procesów odwracalnych, II zasada termodynamiki dla dowolnych procesów, prawo wzrostu entropii w procesach nieodwracalnych.

II. Zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa

§1. *Elementy teorii prawdopodobieństwa* - częstościowa (Laplace'a) definicja prawdopodobieństwa, aksjomatyczna definicja przestrzeni probabilistycznej (Kolmogorov), prawdopodobieństwo warunkowe, zmienne losowe, zmienne losowe ciągłe i dyskretne, gęstość prawdopodobieństwa.

§2. *Funkcje tworzące, momenty, kumulanty i korelacje, centralne twierdzenie graniczne* - definicje średniej, momentów i dyspersji, dygresja o różnych średnich, przykłady średnich: arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna, Höldera, funkcja tworząca dla momentów, kumulanty, funkcja tworząca dla kumulantów, wielkości marginalne, momenty i korelacje, zdarzenia niezależne, faktoryzacja gęstości prawdopodobieństwa i korelacji dla zmiennych niezależnych, dodawanie niezależnych zmiennych losowych, centralne twierdzenie graniczne, rozkład Gaussa.

§3. *Prawdopodobieństwo, informacja i entropia* - pojęcie informacji, ilość informacji, średnia ilość informacji, entropia informacyjna Shannona, własności entropii informacyjnej, niezależne źródła informacji, addytywność entropii informacyjnej.

3.2 Pokazy

- Omówienie PID - proportional integral derivative do stabilizacji pomiarów, np. procesów izotermicznych.

3.3 Zadania na ćwiczenia

- Wykazać równoważność sformułowań drugiej zasady termodynamiki przez Clausiusa i przez Keplina.
- Wyznaczyć sprawność silnika działającego w odwracalnym cyklu Carnota, gdzie czynnikiem roboczym jest gaz doskonały jednoatomowy.
- Wykazać, że sprawność lodówki działającej w sposób odwracalny wynosi $\omega_c = T_2/(T_1 - T_2)$.
- Wykazać, że dla dowolnego procesu nieskończonego, w którym układowi dostarczane jest ciepło Q od termostatu o temperaturze T , zachodzi nierówność $dS \geq Q/T$.
- Wykazać, że sprawność dowolnego silnika pracującego pomiędzy dwoma termostatami o temperaturach $T_1 > T_2$ nie może być większa od sprawności odwracalnego cyklu Carnota, tzn. $\eta \leq 1 - T_2/T_1$.
- Wykazać, że związek $dQ = TdS$, gdzie T jest temperaturą, określa T i S z dokładnością do transformacji $T' = aT$, $S' = S/a + b$, gdzie a i b to pewne stałe rzeczywiste.
- Wyznaczyć entropię dla jednoatomowego gazu doskonałego scharakteryzowanego równaniami stanu $pV = nRT$ oraz $U = \frac{3}{2}nRT$.
- Wyznaczyć w funkcji temperatury T i ciśnienia p potencjał chemiczny μ jednoskładnikowego gazu doskonałego.

3.4 Zadania domowe

Zbieramy 28 marca 2024r. na wykładzie. We wtorek 26 marca jest plan czwartkowy, więc zbieramy tego dnia.

- Odwracalny cykl Mayera składa się z adiabatycznego rozprężania, izobarycznego sprężania i izochorycznego ogrzewania. Rozpatrując ten cykl dla jednego mola gazu doskonałego jako czynnika roboczego wyznaczyć cieplny równoważnik pracy, tzn. pokazać, że $R = c_p - c_v$.
- Czy dla układu fizycznego może być spełniona równość $c_p = c_v$? Jeżeli tak, to podać przykład takiego układu.

- Gaz van der Waals scharakteryzowany jest przez równania stanu

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

$$u = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{v}.$$

Wyznaczyć równanie podstawowe $S = S(U, V, N)$ dla tego gazu.

4 Tydzień IV, 18-24/03/2024

4.1 Wykład

III. Ergodyczność i dochodzenie układu do stanu równowagi

§1. *Przepływ w przestrzeni fazowej w mechanice klasycznej* - Problem nieodwracalności w czasie zjawisk makroskopowych, postawienie problemu, przestrzeń fazowa, ewolucja Hamiltonowska, równania Hamiltona, ogólne układy dynamiczne i ewolucja objętości w przestrzeni fazowej, prędkość bez dywergencji jako warunek na zachowanie objętości w przestrzeni fazowej, spełnienie tego warunku w dynamice Hamiltonowskiej, równanie Liouville'a i jego rozwiązanie w przypadku zależności gęstości od wielkości zachowanych, rozkład mikrokanoniczny.

§2. *Nieodwracalność a powrót Poincare'go* - założenia i treść twierdzenia o powrocie (Poincare'go).

§3. *Hipoteza ergodyczna, rozkład mikrokanoniczny* - średnia po czasie, średnia po zespole statystycznym, hipoteza ergodyczna, zasada równych prawdopodobieństw a priori, gęstość stanów na powierzchni o ustalonej energii, rozkład mikrokanoniczny.

§4. *Dynamika kwantowa* - operator statystyczny i opis stanów mieszanych, własności operatora statystycznego, kryteria czystości stanu, entropia von Neumanna, operator zredukowane dla układów wielu cząstek, stany niezależne (iloczynowe), stany nieskorelowane i średnie, macierz gęstości w reprezentacji położeniowej i pędowej, funkcja Wignera opisująca rozkład w przestrzeni fazowej.

4.2 Pokazy

- Gwałtowny wpływ powietrza do próżni w długiej rurze.

4.3 Zadania na ćwiczenia

- Wybieramy w sposób przypadkowy liczbę leżącą między 0 a 1. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że dokładnie pięć spośród dziesięciu pierwszych cyfr po przecinku składać się będzie z cyfr mniejszych od 5?
- Działo obracające się ze stałą prędkością kątową ω strzela w losowo wybranej chwili. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa położenia punktu trafienia na ekranie znajdującym się w odległości d od działa.

- Rzucamy w sposób przypadkowy igłą o długości $2l$ na płaszczyznę, na której narysowano proste równoległe odległe o $2a$ ($a > l$). Jakie jest prawdopodobieństwo przecięcia przez igłą którejkolwiek prostej?

- Na przykładzie cząstek z momentem magnetycznym (spinów) wprowadzić i omówić rozkład dwumienny (Bernoulliego). W odpowiednich granicach wyprowadzić rozkłady Gaussa i Poissona i omówić ich własności, znaleźć funkcję tworzącą dla momentów i kumulantów (gdzie istnieją), momenty i kumulanty. Przy okazji przypomnieć, udowodnić wzór Stirlinga.

- Pokazać, że kumulanty są pewnymi kombinacjami momentów dla K_n z $n = 1, 2, 3, 4$. Podać ogólne wyrażenia.

- a) Korzystając z tego, że średnia energia kinetyczna gazu doskonałego $E = m \sum_i^N \langle v_i^2 \rangle / 2N = k_B T / 2$ na jeden stopień swobody, gdzie m jest to masa cząstki, T temperatura, a k_B stała Boltzmana, oraz z centralnego twierdzenia granicznego dla niezależnych zmiennych losowych wyprowadzić rozkład Maxwella (1859) dla prędkości \vec{v} , tj.

$$p(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}}.$$

- b) Znaleźć rozkład Maxwella w zmiennych $v = |\vec{v}|$ i Ω kąt bryłowy, tj.

$$p(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}},$$

$$p(\Omega) = \frac{1}{4\pi}.$$

- Znaleźć prędkość typową, średnią i średnia jej kwadrat. c) Znaleźć rozkład energetyczny od $E = mv^2/2$, tj.

$$p(E) = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}(k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{E}{k_B T}}.$$

- d) Z przekazu pędu wyprowadzić równanie stanu gazu doskonałego $pV = Nk_B T$ i $pV = \frac{2}{3}U$. e) Z zasady ekstremum entropii $S = -k_B \int d_3 v p(\vec{v}) \ln(p(\vec{v})C)$, gdzie C jest pewna stałą gdyż $p(\vec{v})$ jest wymiarowe (!), oraz warunku, że prawdopodobieństwo jest unormowane do jedności i $\langle v_x^2 \rangle k_B T / m$ wyprowadzić ponownie rozkład Maxwella. Znaleźć entropię tego gazu (z dokładnością do C).

- Talia zawiera 52 potasowane karty. a) Jaka jest zawartość informacyjna całej talii? b) Jaka jest zawartość informacyjna 5-kartowego układu pokera wyciąganego losowo z tej talii.

4.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 4 kwietnia 2024r.

1. Dowieść wzór rekurencyjny pomiędzy momentami M_n i kumulantami K_n

$$M_n = \sum_{l=1}^n \frac{(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!} M_{n-l} K_l.$$

2. Częstość występowania liter polskiego alfabetu w tekstach można znaleźć w

<https://sjp.pwn.pl/poradnia/haslo/frekwencja-liter-w-polskich-tekstach;7072.html>

Na tej podstawie znaleźć entropie informacyjną Shannona liczoną na literę polskiego alfabetu. Jak bardzo ta wartość różni się od przypadku, gdyby każda z liter występowała z takim samym prawdopodobieństwem? Powtórzyć podobną analizę dla przypadku języka angielskiego w oparciu o dane z

<https://www3.nd.edu/~busiforc/handouts/cryptography/letterfrequencies.html>

Wyciągnąć i przedyskutować wnioski porównując oba alfabety.

3. Wg "informacji z internetów" wetknięcie po omacku wtyczki USB do gniazdka wymaga przeciętnie trzech prób. Rozważmy model: początkowo wtyczka jest w losowej orientacji (50%/50%). Jeśli orientacja jest niewłaściwa — odwracamy wtyczkę i powtarzamy; jeśli orientacja jest poprawna to z prawdopodobieństwem p uda nam się ją wetknąć w gniazdko, a z prawdopodobieństwem $1-p$ nam się nie uda i wtedy odwracamy wtyczkę i powtórzymy próbę. Ile musi wynosić p aby zgodnie z internetową mądrością potrzeba było średnio trzech prób?

4. (*) Na ćwiczeniach rozważaliśmy błędzenie przypadkowe na półprostej całkowitej: delikwent startował z położenia 0 i z prawdopodobieństwem p zmieniał je o $+1$, a z prawdopodobieństwem $1-p$ zmieniał je o -1 . Błędzenie kończyło się spadnięciem w przepaść po osiągnięciu położenia $+1$. Pokazaliśmy, że do spadnięcia dochodzi z prawdopodobieństwem $p/(1-p)$.

a) oblicz jaka jest średnia liczba kroków wykonanych przez błędzącego przed spadnięciem w przepaść (ograniczamy się tylko do tych którzy faktycznie w przepaść spadli)?

b) oblicz jaka jest średnia liczba kroków poprzedzających spadnięcie w przepaść jeśli błędzący mógł poruszać się tylko po półce skalnej o szerokości 2 kroków, tj.: startował stojąc na krawędzi przepaści - mógł wykonać dwa kroki w lewo, ale nie więcej. Tak jak we wcześniejszej wersji zadania kroki przybliżające do przepaści wykonywane są z prawdopodobieństwem p , a oddalające od niej z prawdopodobieństwem $1-p$.

Porównaj i skomentuj zależność średniej liczby kroków od p w przypadkach (a) i (b).

5 Tydzień V, 25-31/03/2024

5.1 Wykład

§5. *Kwantowy układ izolowany - dochodzenie do równowagi* - Hamiltonian niezależny od czasu, zasada zachowania energii w mechanice kwantowej, definicja diagonalnego zespołu statystycznego w kwantowej fizyce statystycznej, zależność czasowa dowolnej obserwabli, wyrazy diagonalne i interferencyjne w funkcjach korelacji i średnich, heurystyczny warunek na znikanie wyrazów interferencyjnych, przybliżenie chaotycznych faz,.

§6. *Kwantowa termalizacja. Hipoteza termalizacji stanów własnych* - Paradoksy unitarnej ewolucji średnich w czasie, koncepcja lokalnych obserwabli, hipoteza (postulat) termalizacji stanów własnych lokalnych obserwabli, rozkład mikrokanoniczny.

IV. Rozkład mikrokanoniczny

§1. *Stacjonarny rozkład mikrokanoniczny w mechanice klasycznej i kwantowej* - maksymalizacja entropii, zasada równych prawdopodobieństw a priori, gęstość stanów w przestrzeni fazowej, Boltzmannowska definicja entropii, równoważność powierzchni o objętości w przestrzeni fazowej w granicy termodynamicznej, zasada holograficzna w fizyce statystycznej, długość termiczna fali materii, granica klasyczna i granica kwantowa, kwantowy zespół mikrokanoniczny.

§2. *Zespół mikrokanoniczny dla gazu doskonałego* gęstość stanów dla gazu doskonałego o ustalonej energii E , entropia gazu doskonałego, problem stałej, normalizacja elementu objętości w przestrzeni fazowej, pojawienie się stałej Plancka w rozważaniach klasycznych, problem z addytywnością entropii, paradoks Gibbsa, czynnik permutacyjny dla cząstek nierozróżnialnych, wzór na entropię Sakurai-Tetrode.

5.2 Zadania na ćwiczenia

1. Udowodnić twierdzenie o powrocie Poincaré'go.
2. Sprawdzić, że dla operatora statystycznego zachodzą: $\text{Tr} \rho = 1$, $\rho^\dagger = \rho$, $\text{Tr} \rho^2 \leq 1$.
3. Dla stanu czystego dwóch fotonów o polaryzacja x i y

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p}|x_1 x_2\rangle + \sqrt{1-p}|y_1 y_2\rangle,$$

gdzie $0 \leq p \leq 1$, znaleźć operator statystyczny, zredukowane operatory statystyczne i ich entropie. Kiedy stan jest nieskorelowany?

4. Pokazać, że dla układu swobodnego funkcja Wignera spełnia równanie

$$\frac{\partial W(q, p, t)}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial q} = 0.$$

Znaleźć rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(q, p, t) &= \exp(-t\hat{p}/m)W(q, p, t=0) \\ &= W(q - pt/m, p, t=0). \end{aligned}$$

5.3 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 11 kwietnia 2024r.

- 1.

6 Tydzień VI, 01-07/04/2024

6.1 Wykład

§3. *Równowaga cieplna i mechaniczna* - fluktuacja energii pomiędzy układami z przegrodą przepuszczającą energię, temperatura bezwzględna wyznaczona z mikroskopowej entropii układu, stabilność rozkładu najbardziej prawdopodobnego, dygresja o ujemnych temperaturach bezwzględnych gdy widmo energetyczne jest ograniczone z góry, równowaga cieplna dla przegrody ruchomej, mikroskopowa definicja ciśnienia, II zasada termodynamiki jako prawo, że układ dąży do stanu najbardziej prawdopodobnego.

V. Potencjały termodynamiczne

§1. *Transformacja Legendre'a* - konieczność użycia innych zmiennych termodynamicznych niż E , V czy N , definicja transformacji Legendre'a i definicja energii swobodnej Helmholtza, entalpii, energii swobodnej Gibbsa.

6.2 Zadania na ćwiczenia

kontynuacja zadań z poprzedniego tygodnia.

7 Tydzień VII, 08-14/04/2024

7.1 Wykład

§2. *Termodynamika układu w kontakcie z rezerwuarem* - zachowanie układu w kontakcie z termostatem, barostatem oraz ich kombinacją. Pokazałem że odpowiednio potencjały F , H oraz G mają w tych sytuacjach minimum.

§3. *Relacje Maxwella* - Pokazałem relacje Maxwella i magiczny kwadrat.

§4. *Warunki stabilności termodynamicznej* - warunki stabilności i wynikające z nich wnioski o ciepłe właściwym (C_p , C_V) oraz współczynnikach ściśliwości (K_S , K_T) + przykłady.

7.2 Pokazy

Pokaz z zachowaniem nurka Kartezjusza w wodzie o podwyższonym oraz obniżonym ciśnieniu

7.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Microcanonical ensemble - equilibrium conditions* - An isolated system of the energy U , volume V , and number of particles N (microcanonical ensemble) is split with a partition that allows to exchange the energy and particles and change the volumes of subsystems, i.e. U_i , V_i and N_i ,

with $i = 1, 2$, are random variables which are constrained $U_1 + U_2 = U$, $V_1 + V_2 = V$ and $N_1 + N_2 = N$. Let $\Omega_i(U_i, V_i, N_i)$ be the number of microstates corresponding to a given macrostate (U_i, V_i, N_i) of each subsystem. Compute the total number of microstates for a given macrostate of the whole system. Maximizing the corresponding probability, find the equilibrium conditions for those subsystems. Hints: Introduce an entropy $S = k_B \ln \Omega$, temperature $1/T = (\partial S / \partial U)_{V, N}$, pressure $p/T = (\partial S / \partial V)_{U, N}$ and a chemical potential $-\mu/T = (\partial S / \partial N)_{U, V}$.

2. *Number of microstates for a classical ideal gas in microcanonical ensemble* - For a classical ideal gas in three dimensions find $\Omega(U, V, N)$ and $\Gamma(U, V, N)$. Find the corresponding expansions in case of large N .

Hints: $\Gamma(U, V, N) = \int d_{3N}x d_{3N}p / (h^{3N} N!) \Theta(p - \sum_{i=1}^N p_i^2 / 2m)$,

$\Omega(U, V, N) = (\partial \Gamma(U, V, N) / \partial U)_{V, N} \delta U$, and apply the Stirling formula $n! = n^n e^{-n}$. A schematic derivation and final results are shown at the lecture.

3. *Thermodynamics of an ideal classical gas from microcanonical ensemble* - Applying results of the previous problem, also discussed at the lecture, determine the temperature T , the pressure p and the chemical potential μ for an ideal classical gas in three dimensions. Show the energy equipartition theorem in this example and derive an equation of state for this system.

4. *Harmonic oscillator in microcanonical ensemble* - A system is described by a set of classical harmonic oscillators with the Hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}_i^2 \right).$$

Compute $\Gamma(U, V, N)$, $\Omega(U, V, N)$, entropy, temperature, specific heat, pressure, and chemical potential. Why volume is not present?

5. *Spins in magnetic field, microcanonical ensemble* - An isolated system of $N \gg 1$ localized spins $\hbar/2$ is in an external magnetic field B and is described within a microcanonical ensemble. Find the entropy, internal energy, temperature, magnetization, magnetic susceptibility, specific heat. Discuss results and plot them as a functions of temperature.
6. *Ising spins in canonical ensemble* - Consider a system of N Ising spins in a magnetic field. Derive the partition function and discuss thermodynamics of this system by deriving internal energy, magnetization, free energy, entropy, magnetic susceptibility. Compare microcanonical and canonical description.
7. *Negative absolute temperatures* (This is an additional material if time allows, it should be presented by tutors.) - Discuss a problem of the existence

and a meaning of a negative absolute temperature in systems of localized spins and in systems with itinerant degrees of freedom. Discuss historical and recent experimental findings. Discuss thermodynamics and, in particular, an energy transfer between two systems if the negative temperatures are allowed.

Literature:

- N. Spisak, Foton 132, Wiosna 2016, p. 16;
 S. Braun et al., Science 339, p. 52 (2013);
 N. Ramsey, Phys. Rev. 103, p. 20 (1956);
 M. Klein, Phys. Rev. 104, p. 589 (1956);
 D. Frenkel et al., Am. J. Phys. 83, p. 163 (2015) (!!!);
 E. Abraham, et al., Phys. Rev. E 95, p. 012125 (2017) (!!!);

7.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 18 kwietnia 2024r.

1. *Two-level system* - It is a very popular model describing localized spins $1/2$, photons with polarization or atoms in certain states. For spins $1/2$ it is visualized that each particle has a magnetic moment pointing up or down. Write down all possible microstates in the case of $N = 2, 3$, and 4 particles. For the spin system the natural variables describing different macrostates are the total number of particles N and the "magnetization" $M = N_+ - N_-$, where N_{\pm} is the number of moments pointing up and down, respectively. Derive a formula for the number of microstates $\Omega(N, M)$, realizing a given macrostate with N and M . Find the total number of states $\Omega(N) = \sum_M \Omega(N, M)$. In the limit of large N show that $\Omega(N, M) \approx \Omega(N, 0)e^{-M^2/2N}$ is Gaussian. Show that $\Omega(N, 0) \approx \sqrt{2/\pi N} 2^N$ and estimate its value for $N = 100$. Which are the most probable macrostates?
2. *Gas fluctuations in a cubic box* A cubic box with isolating (adiabatic) walls of length L contains N particles of an ideal gas. Find the dispersion of the centre of mass of the system in equilibrium. How does the dispersion behave with the increasing number of particles in the box?
3. *Rare fluctuation in the air* - An air in a room of dimensions $3\text{m} \times 3\text{m} \times 3\text{m}$ is under a normal conditions (atmospheric pressure and $T = 300\text{K}$). Estimate a probability that at a given time in a cubic volume a) 1cm^3 , b) 1\AA^3 (angstrom) at any place in this room there is no air due to a statistical fluctuation. Hint: $p \sim \exp(-N(v/V))$, where N is a number of particles, V is a volume of the room, and v is a volume of the small cube.
4. (*) *Distribution of particles in a container* - Consider N identical, distinguishable particles occupying k cells. It is a model of a discrete space with particles in it. Microstates are given by the

distribution of particles in each cell. Macrostates are characterized by providing numbers of particles n_i in each cell i . Derive the formula for the number of microstates for a given macro-state $\Omega(n_1, n_2, \dots, n_k) = N! / n_1! n_2! \dots n_k!$. With a fixed number of particles $N = \sum_i n_i$ show that the most probable distribution of particles is such that in each cell there is $n_i = N/k$ of them. In other words, the distribution is uniform.

8 Tydzień VIII, 15-21/04/2024

8.1 Wykład

VI - Zespół kanoniczny

§1. *Klasyczny zespół kanoniczny* - definicja zespołu kanonicznego, wyprowadzenie rozkładu kanonicznego z rozkładu mikrokanonicznego, czynnik Boltzmannowski, wyprowadzenie rozkładu kanonicznego z zasady maksymalizacji entropii, interpretacja parametru β jako odwrotności temperatury, definicja kanonicznej sumy statystycznej, wyprowadzenie termodynamiki z kanonicznej sumy statystycznej, energia wewnętrzna, entropia, energia swobodna Helmholtza, fluktuacje energii w zespole kanonicznym, związek ich z ciepłem właściwym, równoważność zespołów mikrokanonicznego i kanonicznego w granicy termodynamicznej, mikroskopowa interpretacja pracy i ciepła w procesach odwracalnych, zasada ekwipartycji energii, gaz doskonały w zespole kanonicznym.

§2. *Kwantowy rozkład kanoniczny* - uogólnienie rozkładu kanonicznego na przypadek kwantowy, operator statystyczny w zespole kanonicznym, problem nierozróżnialności cząstek, wyprowadzenie sumy statystycznej dla gazy doskonałego nierozróżnialnych cząstek w kwantowym zespole kanonicznym z pominięciem statystyki cząstek.

§3. *Rozkład Maxwella* - wyprowadzenie rozkładu Maxwella dla gazu doskonałego, własności rozkładu i różne jego przedstawienia, doświadczalne badanie rozkładu Maxwella i jego zastosowanie do wyznaczenia temperatury zimnych atomów.

8.2 Zadania na ćwiczenia

1. Rozważmy prosty układ dla którego równanie podstawowe w reprezentacji energetycznej ma postać:

$$U(S, V, N) = \frac{1}{VN} \left(\frac{S}{3A} \right)^3,$$

gdzie A to pewna stała. Wyznaczyć energię swobodną Helmholtza, entalpię, entalpię swobodną Gibbsa i wielki potencjał termodynamiczny dla tego układu.

2. Wypisać wszystkie możliwe tożsamości Maxwella dla energii swobodnej Helmholtza $F(T, V, N)$ i entalpii swobodnej Gibbsa $G(T, p, N)$.
3. Pokazać, że

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) - V = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -C_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S.$$

4. Rozważmy paramagnetyk o następujących trzech własnościach:

- jego objętość nie zmienia się w procesach termodynamicznych ($V = \text{const}$),
- spełnione jest prawo Curie: $\chi_T(T) = a/T$,
- pojemność cieplna w zerowym polu magnetycznym jest dana wzorem: $C_h(T, 0) = bV/(T^2)$,

gdzie a i b są dodatnimi stałymi. Znaleźć pojemność cieplną $C_h(T, h)$ dla dowolnej wartości natężenia pola magnetycznego h .

5. Proces Joule - Thomsona (dławienie gazu) polega na powolnym przeciskaniu gazu poprzez porowatą przegrodę (dławik) z jednego podukładu do drugiego przy ustalonych wartościach ciśnień w obu podukładach (równych odpowiednio p_A i p_B , $p_A > p_B$) i przy adiabatycznym osłonięciu całego układu. Stałość ciśnień gazu w każdym z podukładów zapewniona jest dzięki powolnemu ruchowi tłoków ograniczających te podukłady. Ruch tłoka w podukładzie o większym ciśnieniu związany jest ze zmniejszaniem jego objętości w trakcie przechodzenia gazu przez porowatą przegrodę; w podukładzie o mniejszym ciśnieniu ruchowi tłoka towarzyszy zwiększanie jego objętości. Przejściu przez dławik w tym procesie towarzyszy zmiana temperatury gazu:

$$(T_B - T_A) = \mu_{JT}(p_B - p_A),$$

gdzie $\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{H,N}$ nosi nazwę współczynnika Joulea-Thomsona. Krzywą inwersji nazywamy krzywą w przestrzeni stanów zadaną równaniem $\mu_{JT}(T, p) = 0$. Wyznaczyć współczynnik μ_{JT} , krzywą inwersji, a także maksymalną i minimalną temperaturę inwersji dla gazu van der Waalsa.

6. Sprawdzić stabilność mechaniczną 1 mola gazu van der Waalsa. Następnie przedyskutować konstrukcję Maxwella dla tego gazu wykorzystując odpowiednie potencjały termodynamiczne. Zinterpretować uzyskany diagram fazowy.

7. Gaz znajduje się w zbiorniku z ruchomym tłokiem i jest w równowadze cieplnej oraz mechanicznej z otoczeniem o zadanej temperaturze T i ciśnieniu p . W wyniku jakiego zewnętrznego działania tłok adiabatycznie (odwracalnie) przesuną się na zewnątrz, a zatem zmalało ciśnienie gazu. Opisać jak układ zareaguje na tę zmianę.

8. Pokazać, że dla $k \neq i$ spełniona jest nierówność

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial y_i}\right)_{X_k} < \left(\frac{\partial X_i}{\partial y_i}\right)_{y_k},$$

gdzie $(S, V, N, \dots) = (X_1, X_2, X_3, \dots)$ oraz $(T, -p, \mu, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$. Zinterpretuj ten wynik dla $\kappa_S < \kappa_T$ odwołując się do reguły przekory Le Chateliera-Brauna.

8.3 Zadania domowe

zbieramy 25 kwietnia 2024r.

1. *Chain of rods* - N rods o length a are connected together one to each other (the end of one to the beginning of the next) forming a chain. The first rod and the last one are hung on fixed points remote by a distance l , where $l < Na$ and l/a is a natural number. Find the number of possible microstates Ω for a given macrostate $l = |N_+ - N_-|a$, where N_{\pm} is the number of rods pointed to the right/left. Estimate the entropy $S = k_B \ln \Omega$ at large N . This model is the simplest one embodying the essential property of the rubber elasticity. In particular, one can compute the tension $X = (\partial F / \partial l)_T = -T(\partial S / \partial l)_T \sim (k_B T / Na^2)l$ at large N , which obeys the Hook's law. Hints: rods are infinitely thin and placed parallel to each other. It is possible that rods are on both sides of the boundary fixed points. The number of possible microstates we can find similarly as in the problem with the Ising spins.

2. Statistical sum satisfies the relation $\ln Z = aT^\alpha V$, where a and α are positive constants. Calculate specific heat at constant volume of this system.

3. Consider N magnetic moments, which have two allowed orientations $\pm\mu$ in an external magnetic field B (the energy of each dipole can take values $\pm\mu B$). Within the canonical ensemble, find the relative dispersion of the magnetization $\sigma_M / M = \sqrt{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2} / \langle M \rangle$.

9 Tydzień IX, 22-28/04/2024

9.1 Wykład

9.2 Pokazy

9.3 Zadania na ćwiczenia

1. Niech x oznacza jakąś ze składowych pędu lub położenia uogólnionego jednej z molekuł. Wykazać, że

$$\left\langle x \frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle_{\text{MC}} = k_B T,$$

gdzie $\langle \cdot \rangle_{\text{MC}}$ oznacza średniowanie względem rozkładu mikrokanonicznego. Zauważmy, że wynik nie zależy od zespołu statystycznego. Na wykładzie wyprowadziliśmy to samo w ramach zespołu kanonicznego.

2. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania wykazać twierdzenie o wirale mówiące, że

$$pV = Nk_B T - \frac{1}{3} \left\langle \sum_{(ij)} \vec{r}_{ij} \frac{\partial V(\vec{r}_{ij})}{\partial \vec{r}_{ij}} \right\rangle,$$

gdzie ogólny Hamiltonian jest w postaci

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i) + \sum_{(ij)} V(\vec{r}_{ij}),$$

a $U(\vec{r}_i)$ opisuj potencjał związany z istnieniem ścianek, a $V(\vec{r}_{ij})$ jest dwucząstkowym potencjałem oddziaływania między cząstkami.

3. *Work microscopically and macroscopically in the canonical ensemble* - Assuming that the energy level $\epsilon_i(X)$ changes with the change of the control parameter X introduce a microscopic force $F_i = -d\epsilon_i/dX$ and a microscopic work $dW_i = F_i dX$. Derive an equation for the macroscopic work $dW = k_B T (\partial \ln Z / \partial X) dX$. Discuss this result for ideal gas in a box of volume ($dW = -pdV$) and for Ising spins in a magnetic field ($dW = MdB$).
4. *Work, heat, entropy and exact forms* - Recollect the first and the second laws of thermodynamics ($dU + dW = dQ$, and $dQ = TdS$), where dW is the work performed by the system. Discuss the difference between the state function U and its differential dU and the not state functions dW and dQ . Provide a physical interpretation. Show that $dU + dW$ is not an exact form (use $dW = k_B T (\partial \ln Z / \partial X) dX$ and $U = -(\partial \ln Z / \partial \beta)$). Show that $\beta(dU + dW)$ is an exact form with the integration factor $S/k_B = \ln Z - \beta(\partial \ln Z / \partial \beta)$. Show the equivalence of S with the thermodynamic entropy $S = -(\partial F / \partial T)_{X,N}$.
5. *Classical ideal gas of two-atom molecules* - Ideal gas is composed of molecules with two atoms of mass m_1 and m_2 . Atoms inside a molecule interact with each other with the potential of model (expanded) form $V(r) = V(r_0) + (1/2)m\omega_0\xi^2$, with $\xi = r - r_0$. For a single molecule find the kinetic energy in relative and center of mass coordinates. Then find the partition function and discuss each contributing terms. For the translationally invariant part use the earlier results for a monoatomic ideal gas. For rotational and vibrational degrees of freedom show that $Z_1^{\text{rot}} = 2Ik_B T / \hbar^2$ and $Z_1^{\text{vib}} = k_B T / \hbar\omega_0$, where $I = mr_0^2$.
6. *Classical ideal gas of two-atom molecules - thermodynamics* - For a gas of diatomic molecules find: internal energy, specific heat at constant volume, Helmholtz free energy, pressure and equation of state, entropy.

3. The probability density function of measuring the value E of an internal energy of a classical ideal gas, which remains in the thermal equilibrium with a thermostat of temperature T , can be written as

$$\rho(E) = \frac{E^a \exp(-\beta E)}{\int_0^\infty E^a \exp(-\beta E) dE},$$

where

$$a = \frac{3N}{2} - 1, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Using this function calculate the mean energy and derive the most probable value of the energy. Show that the two are indistinguishable for the classical ideal gas.

4. (*) Prove the Dalton's law (which states that in a mixture of non-reacting gases, the total pressure is equal to the sum of the partial pressures of the individual gases) for a mixture of classical gasses using the canonical ensemble. Hint: Calculate the statistical sum for the mixture of gasses and make use of the definition of the pressure for one-component gas.

9.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 9 maja 2024.

1. A system can be in states of energies $0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon$. Calculate the internal energy of this system and the specific heat at temperature T .
2. *Tonk's gas* - 1D system consists of N small segments, each of them of mass m and length σ moving along a section of length L ($L \gg N\sigma$). The segments do not pass through each other. Treating the system as classical, calculate the canonical statistical sum, Helmholtz free energy and equation of state of the gas created by such segments.

Literatura

-