

Zadania domowe z fizyki statystycznej (IV rok)
do wykładu prof. B. Cichockiego.

Seria 7

Zadanie 1. Znaleźć rozkład gęstości prawdopodobieństwa, wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych losowych

$$\begin{aligned} a) \quad & X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ b) \quad & X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \end{aligned}$$

gdzie $x_1, \dots, x_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym (tj. Gaussowskim) o wartości średniej równej zero i wariancji σ .

Zadanie 2. Rzucamy w sposób przypadkowy igłę o długości $2l$ na płaszczyznę, na której narysowano dwie wzajemnie równoległe i odległe od siebie o $a > l$ proste. Jakie jest prawdopodobieństwo przecięcia przez igłę którejkolwiek z prostych? (Jest to tzw. problem Buffona).

Zadanie 3. Wykazać, że rozkład ρ prawdopodobieństwa prędkości $\mathbf{v}$ wybranej cząsteczki gazu znajdującego się w stanie równowagi termodynamicznej jest dane rozkładem Maxwella

$$\rho(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} \right).$$

Obliczyć $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle |\mathbf{v}| \rangle$ oraz $\langle \mathbf{v}^2 \rangle$.

Zadanie 4. Odizolowane od otoczenia kuliste naczynie o promieniu R zawiera N cząstek gazu doskonałego. Znaleźć średnie położenie środka masy, tj.

$$\langle \mathbf{r}_{\text{CM}} \rangle \equiv (\langle x_{\text{CM}} \rangle, \langle y_{\text{CM}} \rangle, \langle z_{\text{CM}} \rangle),$$

oraz fluktuacje położenia środka masy gazu, tj.

$$\langle (x_{\text{CM}} - \langle x_{\text{CM}} \rangle)^2 \rangle, \langle (y_{\text{CM}} - \langle y_{\text{CM}} \rangle)^2 \rangle, \langle (z_{\text{CM}} - \langle z_{\text{CM}} \rangle)^2 \rangle,$$

w stanie równowagi termodynamicznej.

Każde z zadań proszę rozwiązać na osobnej kartce. Jedno z nich będzie zbierane na wykładzie we czwartek 2 XII (razem z jednym zadaniem z serii 6).

Uwaga: Rozwiązania zadań *muszą* być opatrzone komentarzami wyjaśniającymi tok rozumowania! Za same wzorki punkty przyznawane nie będą