

Zadania z Fourierów i dystrybucji. Analiza III

Zadanie 1 (było na ćwiczeniach, ale dla przypomnienia...)

Obliczyć m -tą pochodną ($m > 1$) dystrybucji $T = x^{m-1}\theta(x)$.

Obliczyć drugą pochodną dystrybucji T_f generowanej przez $f(x) = \frac{1}{2}|x - a|$.

Odpowiedź: W pierwszym przypadku $T^{(m)} = (m-1)!\delta_0$, w drugim przypadku $T_f'' = \delta_a$ (gdzie $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$)

Zadanie 2 (też było na ćwiczeniach, ale dla przypomnienia...)

Pokazać, że jeśli $f(x) = \ln|x|$, to

$$T_f' = P\frac{1}{x}.$$

Wykazać wzorek

$$\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta_0.$$

Pokazać, że

$$\left(P\frac{1}{x}\right)'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) dx \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}.$$

Pokazać, że jeśli $f(x) = x^\lambda\theta(x)$, $|\lambda| < 1$, to

$$T_f'(\varphi) = \lambda \int_0^\infty dx x^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)].$$

Pokazać, że jeśli $f(x) = \theta(x) \ln x$, to

$$T_f'(\varphi) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0) \theta(1-x)].$$

Zapisać dystrybucje $T_s = \sin x \delta_0''$ oraz $T_c = \cos x \delta_0''$ przez delty i ich pierwsze pochodne. Sprawdzić, czy prawdziwy jest wzór $\sin^2 x \delta_0'' + \cos^2 x \delta_0'' = \delta_0''$.

Zadanie 3

Zapisać dystrybucje $T_s = \sin x \delta_0''$ oraz $T_c = \cos x \delta_0''$ przez delty i ich pierwsze pochodne. Sprawdzić, czy prawdziwy jest wzór $\sin^2 x \delta_0'' + \cos^2 x \delta_0'' = \delta_0''$.

Zadanie 4

Znaleźć granicę ciągu dystrybucji generowanych przez ciągi funkcji:

$$a) \quad f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2},$$

$$b) \quad f_n(x, y) = \frac{n^2}{2\pi[n^2(x^2 + y^2) + 1]^{3/2}}.$$

Odpowiedź: W obu przypadkach $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = \delta_0$ (tylko jedna delta jest na funkcjach zdefiniowanych na $\mathbb{R}$, a druga na funkcjach zdefiniowanych na $\mathbb{R}^2$).

Zadanie 5

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ (funkcja charakterystyczna jest równa 1 na zbiorze i 0 poza nim). Obliczyć $\partial^2 T_f / \partial x \partial y$.

Odpowiedź: $\partial^2 T_f / \partial x \partial y = \delta_0$.

Zadanie 6

W $\mathbb{R}^2$ obliczyć laplasjan dystrybucji T_f generowanej przez funkcję $f(x, y) = \ln r$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Odpowiedź: Przy okazji zaadaptować do $\mathbb{R}^2$ wzorki z formami, żeby udowodnić z tw. Stokesa potrzebną tożsamość Greena. Wynik: $\Delta T_f = 2\pi\delta_0$.

Zadanie 7

Dla przypomnienia obliczyć sobie transformatę Fouriera funkcji $f(x) = x e^{-a^2 x^2}$ całkując bezpośrednio (a nie korzystając ze sztuczki podanej na końcu)

Zadanie 8

Obliczyć sobie transformatę Fouriera funkcji $f(x) = (x^2 + a^2)^{-1}$ (wynik: $\tilde{f}(k) = (\pi/a) e^{-|ak|}$), a potem zurück, czyli odwrotną transformatę Fouriera tego, co wyszło, żeby sprawdzić, że wyjdzie $f(x)$.

Zadanie 9

Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = \theta(x) e^{-ax} \sin(bx)$ (dla $a > 0$).

Odpowiedź: $\tilde{f}(k) = b/[b^2 + (a + ik)^2]$.

Zadanie 10

Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = 1/(x^4 + a^4)$.

Odpowiedź: $\tilde{f}(k) = (\pi/a) e^{-|ka|/\sqrt{2}} \cos(\frac{|ka|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4})$.

Zadanie 11

Obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}$ całkując funkcję

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}, \quad \text{w której} \quad a = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

po równoległoboku którego wierzchołki wyznaczają punkty (na płaszczyźnie zespolonej): $z_1 = -R$, $z_2 = R$, $z_3 = R + a$, $z_4 = -R + a$, i przechodząc do granicy $R \rightarrow \infty$.

Zadanie 12

Obliczyć kwadrat modułu transformaty Fouriera funkcji charakterystycznej odcinka $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Odpowiedź: $(4/k^2) \sin^2(\frac{1}{2}k(a - b))$.

Zadanie 13

Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \frac{x e^{ax}}{1 + e^x}, \quad 0 < a < 1.$$

Odpowiedź: Całkować po dużym prostokącie, którego podstawą jest odcinek $(-R, +R)$ osi x , a górnym brzeg jest na odpowiedniej (jakiej?) wysokości i potem przejść z R do nieskończoności.

$$\tilde{f}(k) = i \frac{d}{dk} \frac{\pi}{\sin[\pi(a - ik)]}.$$

Zadanie 14

Spleść całkując bezpośrednio funkcje $f(x) = (a/\pi)/[x^2 + a^2]$ i $g(x) = (b/\pi)/[x^2 + b^2]$.

Odpowiedź: $(f * g)(x) = ((a + b)/\pi)/[x^2 + (a + b)^2]$.

Zadanie 15

Spleść $f(x) = x$ oraz $g(x) = x^2\theta(1 - x)$ i zobaczyć, że $(f * g)(x) = (g * f)(x)$. Zrobić to samo z funkcjami $f(x) = \theta(x)$ i $g(x) = \theta(x) \sin x$.

Zadanie 16

Spleść $f(x) = e^{-a^2x^2}$ z $g(x) = x e^{-b^2x^2}$.

Zadanie 17

Znaleźć dystrybucyjną transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x.$$

“Dystrybucyjną” tzn. transformatę Fouriera $\tilde{T}_f$ dystrybucji T_f generowanej przez $f(x)$.

Odpowiedź:

$$\tilde{T}_f = \frac{1}{2} [\delta(k - 1) + \delta(k + 1)] + \delta'(k - 1) - \delta'(k + 1) - \frac{1}{2} [\delta''(k - 1) + \delta''(k + 1)].$$

Zadanie 18

Obliczyć transformatę Fouriera dystrybucji T_f generowanej przez funkcje $f(x) = (\sin^2 x)/(1 + x^2)$, $h(x) = x^2/(x^2 + a^2)$, $g(x) = (x^3 \sin x)/(x^2 + 1)$

Odpowiedź: (tylko tę jedną mam pod ręką) $\tilde{h}(k) = 2\pi\delta(k) - a\pi e^{-|ak|}$.

Zadanie 19 (było na ćwiczeniach, ale dla utrwalenia)

Pokazać, że jeśli $x^l T = 0$, to

$$T = \sum_{n=0}^{l-1} c_n \delta_0^{(n)}.$$

Podpowiedź: Łatwo się przekonać, że jest to prawda dla $l = 1$, a potem dowodzić indukcyjnie.

Zadanie 20

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania dystrybucyjnego $xT = 1$.

Zadanie 21(było na ćwiczeniach, ale dla utrwalenia)

Pokazać (też indukcyjnie), że jeśli $T^{(l)} = 0$, to

$$T = \sum_{n=0}^{l-1} c_n x^n.$$

Zadanie 22 (było na ćwiczeniach, ale dla utrwalenia)

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania dystrybucyjnego $x(x-1)T' = \delta_0$.

Odpowiedź: $T = c + c_0\theta(x) + c_1\theta(x-1) + \delta_0$.

Zadanie 23

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania dystrybucyjnego $x^r T^{(k)} = 0$.

Odpowiedź: Dla $k \geq r$

$$T = \sum_{l=0}^{k-1} d_l x^l + \sum_{p=0}^{r-1} c_p x^{k-p-1} \theta(x).$$

a co dla $k \leq r$?

Zadanie 24

Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie równania $(x-x^2)T = 1$.

Odpowiedź:

$$T = c_0\delta(x) + c_1\delta(x-1) + P\frac{1}{x} + P\frac{1}{1-x}.$$

Zadanie 25

Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie równania

$$xT = \theta(x).$$

Podpowiedź: $T = T_{\text{jednorodne}} + T_{\text{szczegolne}}$. Jednorodne - wiadomo. Zgadnąć jakieś szczególne.

Wzory, które każdy fizyk musi zapamiętać na całe życie

Definicje transformat Fouriera (dla ogólności w $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbb{R}_x^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \\ f(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}_k^n} \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} e^{+i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Użyteczne sztuczki: jeśli $f(\mathbf{x}) = \partial g(\mathbf{x}) / \partial x_l$, to

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = ik_l \tilde{g}(\mathbf{k}),$$

jeśli $f(\mathbf{x}) = x_l g(\mathbf{x})$, to

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = i \frac{\partial}{\partial k_l} \tilde{g}(\mathbf{k}),$$

Delty Diraca

$$\begin{aligned}\delta^{(n)}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}_k^n} \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} e^{+i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}}, \\ (2\pi)^n \delta^{(n)}(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbb{R}_x^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.\end{aligned}$$

(Uwaga: tu symbol $\delta^{(n)}$ nie oznacza n -tej pochodnej delty, tylko deltę w $\mathbb{R}^n$.)