

Egzamin z OTW

Rozwiązania będą przyjmowane e-mailowo do piątku, 8 lutego, 2019, godz 24.

Zadanie 1. Jednowymiarowa rodzina obserwatorów tworzy dwuwymiarową powierzchnię S w czterowymiarowej czasoprzestrzeni w taki sposób, że przez każdy punkt powierzchni przechodzi linia świata dokładnie jednego z obserwatorów. Linie świata obserwatorów są geodezyjne względem geometrii czasoprzestrzeni. Obserwatorzy zsynchronizowali zegarki. Geometrycznie sprowadziło się to do:

- poprowadzenia przestrzennej krzywej γ zawartej w powierzchni S , która przecina linię świata każdego z obserwatorów dokładnie raz i w każdym swoim punkcie jest prostopadła do przecinanej w nim linii świata, a następnie
- ustawienia każdego z zegarków tak, aby w chwili przecięcia linii γ wszystkie zegarki wskazywały ten sam czas t_0 .

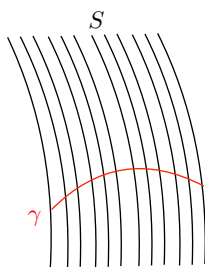
Udowodnić, że zegarki pozostaną zsynchronizowane.

Wskazówka. Udowodnić, że jeśli w czasoprzestrzeni dane są dwa pola wektorowe u oraz X spełniające następujące trzy warunki:

$$u^i u_i = -1, \quad \nabla_u u = 0 \quad \text{ i } \quad [u, X] = 0 \quad (1)$$

to iloczyn skalarny $u^i X_i$ pozostaje stały wzdłuż linii całkowych pola u . Zauważyć, że pola nie muszą być zdefiniowane w całej czasoprzestrzeni, a jedynie na powierzchni spełniającej odpowiednie własności. Wykorzystać tożsamość

$$[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y. \quad (2)$$



czarne: linie świata obserwatorów
czerwona: krzywa jednoczasowości

Zadanie 2. Dana jest czasoprzestrzeń Schwarzschilda

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3)$$

zdefiniowana dla

$$r > 2M. \quad (4)$$

Rozważyć geodezyjną zerową, czyli krzywą opisywaną wzorem

$$[s_0, s_1] \ni s \mapsto (t(s), r(s), \frac{\pi}{2}, \phi(s)), \quad (5)$$

taką, że wektor styczny

$$k = k^i \partial_i = \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \dot{\phi} \partial_\phi, \quad \dot{\cdot} := \frac{d}{ds} \quad (6)$$

spełnia

$$g(k, k) \equiv k^i k_i = 0, \quad \text{oraz} \quad \nabla_k k = 0, \quad (7)$$

gdzie ∇ to pochodna kowariantna metrycznej i beztorsyjnej koneksji.

1. Wyprowadzić dla krzywej równanie o postaci

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + W(r; L) = \frac{1}{2} E^2, \quad (8)$$

gdzie E (energia) oraz L (moment pędu) to odpowiednie stałe ruchu i podać jawną postać efektywnego potencjału $W(r; L)$.

2. Zbadać przebieg potencjału efektywnego W jako funkcji r przy ustalonym L .
3. Wykazać, że geodezyjna przy odpowiednich wartościach energii E oraz momentu pędu L może stanowić niestabilną orbitę kołową. Podać jej promień.
4. W przypadku orbity kołowej z punktu 3 obliczyć wartość E w zależności od L .
5. W przypadku, gdy geodezyjna zaczyna się w nieskończoności ($s_0 = -\infty, r(s_0) = \infty$) i zmierza w stronę centrum, podać warunek na wartości E oraz L , przy których geodezyjna z pewnością nie zacznie już oddalać się od centrum. Wyrazić wynik przy wykorzystaniu pozornego parametru zderzenia

$$b := \frac{L}{E}. \quad (9)$$

Zadanie 3. Pusta czasoprzestrzeń pod horyzontem czasoprzestrzeni Schwarzschilda opisana jest wzorem

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10)$$

gdzie

$$0 < r < 2M. \quad (11)$$

Wektor ∂_r jest tam czasowy. Załóżmy, że jest on zorientowany przeszłość.

Rozważmy geodezyjną czasową, czyli krzywą opisywaną wzorem

$$[s_0, s_1] \ni s \mapsto (t(s), r(s), \frac{\pi}{2}, \phi(s)), \quad (12)$$

taką, że wektor styczny

$$u = u^i \partial_i = \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \dot{\phi} \partial_\phi, \quad \dot{\cdot} := \frac{d}{ds} \quad (13)$$

spełnia

$$g(u, u) \equiv u^i u_i = -1, \quad \text{oraz} \quad \nabla_u u = 0, \quad (14)$$

gdzie ∇ to pochodna kowariantna metrycznej i beztorsyjnej koneksji.

1. Wyprowadzić dla krzywej równanie o postaci

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r; L) = \frac{1}{2} E^2, \quad (15)$$

gdzie E (energia z punktu widzenia drugiej strony horyzontu) oraz L (moment pędu) to odpowiednie stałe ruchu i podać jawną postać efektywnego potencjału $V(r; L)$.

2. W przypadku $L = 0$ obliczyć czas własny s_c , w którym

$$r(s_c) = 0 \quad (16)$$

(ew. wyrazić jako całkę i uzasadnić, że wynik jest skończony.)

Wskazówka. Efektywny potencjał $V(r; L)$ geodezyjnej czasowej wyraża się tym samym wzorem, co potencjał geodezyjnej czasowej w obszarze $r > 2M$.

Zadanie 4. Czasoprzestrzeń przestrzennie jednorodna i izotropowa zdefiniowana jest tensorem metrycznym Friedmanna-Lemaitra-Robertsona-Walkera

$$g = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (17)$$

Równania Einsteina sprowadzają się do układu równań:

$$\frac{3}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad k = -1, 0 \text{ lub } 1 \quad (18)$$

$$\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -4\pi(\rho + 3P) \quad (19)$$

gdzie ρ jest gęstością a P ciśnieniem materii.

Rozważyć przypadek $k = 0$ oraz

$$a(t) = At^{\frac{3}{2}}, \quad A = \text{const.} \quad (20)$$

(a) Obliczyć ρ oraz P , zidentyfikować rodzaj ośrodka materialnego

(b) Zapisać tensor metryczny w postaci

$$g = a^2(t(\eta))(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (21)$$

i znaleźć funkcję $\eta(t)$

(c) Czy z punktu

$$(t_0, 0, 0, 0) \quad (22)$$

można zobaczyć każdego obserwatora o linii świata

$$(t, x_0, y_0, z_0), \quad t > 0, \quad x_0, y_0, z_0 = \text{const}, \quad (23)$$

a jeśli nie, to jaki jest warunek na (x_0, y_0, z_0) ?

Zadania nieobowiązkowe

Ewentualne rozwiązania poniższych będą brane pod uwagę jedynie w przypadku rozwiązania wszystkich zadań 1-4.

1. Na n -wymiarowej rozmaitości H zadany jest dwukrotnie kowariantny symetryczny tensor q rzędu $n - 1$. Udowodnić, że warunkiem koniecznym istnienia na H beztor-syjnej koneksji, takiej że związana z nią pochodna kowariantna ∇ spełnia

$$\nabla q = 0, \quad (24)$$

jest, aby

$$\mathcal{L}_k q = 0, \quad (25)$$

dla każdego pola wektorowego k takiego, że

$$k \lrcorner q = 0. \quad (26)$$

2. Udowodnić, że dla każdego tensora metrycznego g istnieje lokalny układ współrzędnych $(t, x^1, \dots, x^n)$ taki, że

$$g = -dt^2 + g_{ab}dx^a dx^b, \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (27)$$

3. Punkt materialny znajduje się w pustej czasoprzestrzeni wewnątrz horyzontu czasoprzestrzeni Schwarzschilda i porusza się po geodezyjnej czasowej. Znajdź czas $T_{\max}$ przed upływem którego (na zegarku poruszającym się wraz z punktem) geodezyjna osiągnie osobliwość $r = 0$.

4. Wykazać, że pole Killinga

$$\xi = \partial_t \quad (28)$$

metryki Schwarzschilda (Zadanie 2) rozpatrywane w punktach rozszerzenia czasoprzestrzeni takich, że

$$r = 2M \quad (29)$$

spełnia

$$\nabla_\xi \xi = \kappa \xi. \quad (30)$$

Obliczyć współczynnik κ nazywany grawitacją powierzchniową.