

Zadania z OTW Kolokwium

Zadanie 1 (podstawowe - zalicza kolokwium na bdb). Na 4-wymiarowej rozmaitości M dany jest tensor metryczny

$$g = -f(r)dt \otimes dt + \frac{1}{f(r)}dr \otimes dr + r^2(d\phi^1 \otimes d\phi^1 + d\phi^2 \otimes d\phi^2) \quad (1)$$

gdzie funkcje $(\phi^1, \phi^2, t, r,)$ tworzą układ współrzędnych tam, gdzie

$$f(r) \neq 0. \quad (2)$$

Zakładamy też, że

$$f(r) > 0. \quad (3)$$

Wybrać ko-reper $(e^1, \dots, e^4)$ i ...

(i) Obliczyć 1-formę koneksji Γ^i_j , $i, j = 1, 2, 3, 4$ zakładając jej beztorsyjność oraz metryczność.

(ii) Obliczyć 2-formę krzywizny $\mathcal{R}^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}e^k \wedge e^l$.

(iii) Obliczyć tensor Ricciego R_{ij} oraz skalar Ricciego R , czyli

$$R_{ij} := R^k_{ikj}, \quad R := g^{ij}R_{ij}. \quad (4)$$

(iv) Znaleźć wszystkie funkcje f , dla których

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}, \quad \text{oraz} \quad \Lambda = \text{const}. \quad (5)$$

(v) Rozwiązać punkt (iv) nie zakładając ostatniej równości.

Rozwiązanie

Przyjmujemy ko-reper:

$$e^1 = \sqrt{f}dt, \quad e^2 = \frac{dr}{\sqrt{f}}, \quad e^3 = rd\phi^1, \quad e^4 = rd\phi^2, \quad (6)$$

$$g = -e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4 \quad (7)$$

Przez prim „'” będziemy oznaczać pochodną $\frac{d}{dr}$.

Obliczamy:

$$de^1 = \frac{f'}{2\sqrt{f}}e^2 \wedge e^1, \quad de^2 = 0, \quad de^3 = \frac{\sqrt{f}}{r}e^2 \wedge e^3, \quad de^4 = \frac{\sqrt{f}}{r}e^2 \wedge e^4 \quad (8)$$

A więc

$$de^i = \frac{1}{2}\gamma^i_{jk}e^j \wedge e^k, \quad \gamma^i_{jk} = -\gamma^i_{kj}, \quad (9)$$

gdzie jedyne niezerowe funkcje γ^i_{jk} , to

$$\gamma^1_{21} = \frac{f'}{2\sqrt{f}} = -\gamma^1_{12}, \quad \gamma^3_{23} = \frac{\sqrt{f}}{r} = -\gamma^3_{32}, \quad \gamma^4_{24} = \frac{\sqrt{f}}{r} = -\gamma^4_{42} \quad (10)$$

czyli po obniżeniu wskaźników macierzą g_{ij} (7)

$$\gamma_{121} = -\frac{f'}{2\sqrt{f}} = -\gamma_{112}, \quad \gamma_{323} = \frac{\sqrt{f}}{r} = -\gamma_{332}, \quad \gamma_{424} = \frac{\sqrt{f}}{r} = -\gamma_{442}. \quad (11)$$

1-formę koneksji

$$\Gamma^i_j = \Gamma^i_{jk}e^k \quad (12)$$

zdeteminowaną warunkami metryczności i beztorsyjności, czyli taką, że (uwaga, obniżony indeks)

$$\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}, \quad de^i + \Gamma^i_j \wedge e^j = 0 \quad (13)$$

obliczamy ze wzoru

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\gamma_{ijk} + \gamma_{jki} - \gamma_{kij}). \quad (14)$$

Otrzymujemy

$$\Gamma_{121} = \gamma_{121} = -\frac{f'}{2\sqrt{f}}, \quad \Gamma_{323} = \gamma_{323} = \frac{\sqrt{f}}{r}, \quad \Gamma_{424} = \gamma_{424} = \frac{\sqrt{f}}{r} \quad (15)$$

Stąd

$$\Gamma^1_2 = -\Gamma_{12} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}e^1, \quad \Gamma^3_2 = \Gamma_{32} = \frac{\sqrt{f}}{r}e^3, \quad \Gamma^4_2 = \Gamma_{42} = \frac{\sqrt{f}}{r}e^4, \quad (16)$$

oraz

$$\Gamma^2_1 = \Gamma^1_2, \quad \Gamma^2_3 = -\Gamma^3_2, \quad \Gamma^2_4 = -\Gamma^4_2, \quad (17)$$

a pozostałe 1-formy Γ_j^i są równe 0.

Formę krzywizny obliczamy ze wzoru

$$\mathcal{R}_j^i = d\Gamma_j^i + \Gamma_k^i \wedge \Gamma_j^k, \quad (18)$$

pamiętając o antysymetrii

$$\mathcal{R}_{ij} = -\mathcal{R}_{ji}. \quad (19)$$

Otrzymujemy

$$\mathcal{R}_{12}^1 = \mathcal{R}_{21}^1 = -\frac{f''}{2}e^1 \wedge e^2, \quad \mathcal{R}_{13}^1 = \mathcal{R}_{31}^1 = -\frac{f'}{2r}e^1 \wedge e^3, \quad \mathcal{R}_{14}^1 = \mathcal{R}_{41}^1 = -\frac{f'}{2r}e^1 \wedge e^4 \quad (20)$$

$$-\mathcal{R}_{23}^2 = \mathcal{R}_{32}^2 = \frac{f'}{2r}e^2 \wedge e^3, \quad -\mathcal{R}_{24}^2 = \mathcal{R}_{42}^2 = \frac{f'}{2r}e^2 \wedge e^4, \quad -\mathcal{R}_{34}^3 = \mathcal{R}_{43}^3 = \frac{f}{r^2}e^3 \wedge e^4 \quad (21)$$

przy czym nieparzyste równości powyżej (pierwsza, trzecia, piąta, siódma, dziewiąta, jedenaście) są tożsamościami, które wynikają z symetrii tensora krzywizny oraz ortonormalności reperu.

Składowe R_{jkl}^i tensora Riemanna odczytujemy ze wzoru

$$\mathcal{R}_j^i = \frac{1}{2}R_{jkl}^i e^k \wedge e^l. \quad (22)$$

Dla jasności wypiszmy:

$$R_{1212}^1 = \mathcal{R}_{1122}^1 = -\frac{f''}{2}, \quad R_{1313}^1 = \mathcal{R}_{1133}^1 = -\frac{f'}{2r}, \quad R_{1414}^1 = \mathcal{R}_{1144}^1 = -\frac{f'}{2r} \quad (23)$$

$$-R_{2323}^2 = \mathcal{R}_{2233}^2 = \frac{f'}{2r}, \quad -R_{2424}^2 = \mathcal{R}_{2244}^2 = \frac{f'}{2r}, \quad -R_{3434}^3 = \mathcal{R}_{3344}^3 = \frac{f}{r^2} \quad (24)$$

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i \quad (25)$$

a pozostałe składowe R_{jkl}^i są zero.

Składowe R_{ij} tensora Ricciego obliczamy ze wzoru

$$R_{ij} = R_{ikj}^k. \quad (26)$$

Otrzymujemy następujący wynik

$$R_{11} = \frac{f'}{r} + \frac{f''}{2} = -R_{22}, \quad R_{33} = -\frac{f}{r^2} - \frac{f'}{r} = R_{44} \quad (27)$$

$$R_{ij} = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (28)$$

Skalar krzywizny Ricciego,

$$R = g^{ij} R_{ij} = -R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44} = -\frac{2f}{r^2} - \frac{4f'}{r} - f'''. \quad (29)$$

Równania

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}, \quad \Lambda = \text{const} \quad (30)$$

sprowadzają się do następujących dwóch równań,

$$\frac{f'}{r} + \frac{f'''}{2} = -\Lambda, \quad (31)$$

$$-\frac{f}{r^2} - \frac{f'}{r} = \Lambda, \quad (32)$$

czyli

$$2f' + rf''' = -2r\Lambda, \quad (33)$$

$$f + rf' = -r^2\Lambda. \quad (34)$$

Ale pierwsze równanie wynika ze zróżniczkowania drugiego, a więc wystarczy rozwiązać drugie.

Szybka metoda, to zauważenie, że drugie równanie ma postać

$$(rf)' = -r^2\Lambda \quad (35)$$

a więc

$$rf = -\frac{1}{3}r^3\Lambda + A, \quad A = \text{const}. \quad (36)$$

Czyli ogólnym rozwiązaniem jest

$$f = -\frac{1}{3}r^2\Lambda + \frac{A}{r}, \quad A = \text{const}, \quad (37)$$

gdzie A jest dowolna stałą.

Metoda systematyczna, to zapisać równanie, jako

$$f' = -\frac{f}{r} - r\Lambda. \quad (38)$$

Ogólne rozwiązanie ma postać

$$f = h + f_{szcz} \quad (39)$$

gdzie h jest rozwiązaniem równania liniowego

$$h' = -\frac{h}{r} \quad (40)$$

zaś f_{szcz} obliczamy z rezolwenty

$$U(r, s) = \frac{s}{r} \quad (41)$$

oraz znanego wzoru

$$f_{szcz}(r) = \int_{r_0}^r U(r, s)(-s\Lambda)ds. \quad (42)$$

W obu przypadkach, zauważmy, że dla ustalonych wartości Λ oraz A w (38), zakres zmienności współrzędnej r musi być tak dobrany, aby $f(r) > 0$, czyli

$$\frac{3A}{r^3} > \Lambda. \quad (43)$$

Stałości współczynnika Λ nie trzeba zakładać. Wynika on z tożsamości

$$\nabla^j(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}) = 0. \quad (44)$$

W rzeczy samej,

$$R_{ij} = Rg_{ij} \Rightarrow R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -\Lambda g_{ij}, \quad (45)$$

a wówczas tożsamość implikuje

$$0 = \nabla^j(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}) = -\nabla_j\Lambda. \quad (46)$$

Zadanie 2 (dla dociekliwych). Przyspieszenie a obserwatora zdefiniowanego przez linię całkową pola Killinga ξ tensora metrycznego g (czyli pola wektorowego takiego, że $\mathcal{L}_\xi g = 0$) zdefiniowane jest jako

$$a^i := \nabla_u u^i, \quad \text{gdzie} \quad u := \frac{1}{\sqrt{-\xi^i \xi_i}} \xi \quad (47)$$

jest czteroprędkością obserwatora i zakładamy, że $\xi^i \xi_i < 0$. **Wiedząc**, że

$$a_i = \frac{\nabla_i (\xi^j \xi_j)}{2\xi^k \xi_k} \quad (48)$$

obliczyć przyspieszenie a dla pola Killinga

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \quad (49)$$

w przypadku metryki g z zadania 1 przyjmując

$$f(r) = -\frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (50)$$

Ile wynosi granica długości $\sqrt{a^i a_i}$ dla $r = r_H$, gdy

$$f(r_H) = 0. \quad (51)$$

Część dodatkowa (dla zainteresowanych). Udowodnić wzór (48).

Rozwiązanie

Dla tensora metrycznego z Zadania 1,

$$\xi^\mu \xi_\mu = -f \quad (52)$$

a więc

$$a_i e^i = \frac{df}{2f} = \frac{f'}{2f} dr. \quad (53)$$

Czyli czterowektor przyspieszenia

$$a^i \partial_i = g^{rr} a_r \partial_r = \frac{f'}{2} \partial_r = \left(\frac{M}{r^2} - \frac{r}{3} \Lambda \right) \partial_r \quad (54)$$

w układzie współrzędnych (t, r, ϕ^1, ϕ^2) . Zaś jego długość

$$\sqrt{a_\mu a^\mu} = \frac{|f'|}{2f}. \quad (55)$$

Ale dla $r = r_H$ w mianowniku pojawia się zero. Obliczamy

$$r_H = \left(-\frac{6M}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (56)$$

zaś

$$f'(r_g) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_g = \left(\frac{3M}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (57)$$

Zatem

$$f'(r_H) \neq 0 \quad (58)$$

i

$$\sqrt{a_i a^i} \rightarrow \infty, \quad \text{gdy} \quad r \rightarrow r_H. \quad (59)$$

Wyprowadzenie wzoru (48) z ogólnego wzoru na czterowektor przyspieszenia

$$a = \nabla \frac{\xi}{\sqrt{-\xi^j \xi_j}} \frac{\xi}{\sqrt{-\xi^j \xi_j}} \quad (60)$$

wymaga zauważenia, że ponieważ ξ jest polem Killinga, to

$$\nabla_\xi(\xi^j \xi_j) = \mathcal{L}_\xi(\xi^j \xi^k g_{ik}) = \xi^j \xi^k \mathcal{L}_\xi g_{ik} = 0, \quad (61)$$

oraz, że po opuszczeniu indeksu

$$\nabla_\xi \xi_i = \xi^k \xi_{i;k} = -\xi^k \xi_{k;j} = -\frac{1}{2}(\xi^k \xi_k)_{,i}. \quad (62)$$

Wówczas, po opuszczeniu indeksu w (60) dostajemy

$$a_i = \frac{\nabla_\xi \xi_i}{-\xi^k \xi_k} = \frac{\nabla_i(\xi^j \xi_j)}{2\xi^j \xi_j}, \quad (63)$$

co należało wykazać.

Zadanie 3 (dla pasjonatów). Na n -wymiarowej rozmaitości M dany jest tensor metryczny

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j$$

oraz odpowiadająca mu beztorsyjna i metryczna koneksja. Załóżmy, że funkcja V , spełnia

$$g^{ij} \nabla_i V \nabla_j V = \text{const}, \quad \text{gdzie} \quad g^{ik} g_{kj} := \delta_j^i. \quad (64)$$

Wykazać, że pole wektorowe

$$X^i := g^{ik} \nabla_k V, \quad (65)$$

jest geodezyjne, czyli

$$\nabla_X X = 0. \quad (66)$$

Dla tensora metrycznego

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt \otimes dt + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi) \quad (67)$$

znaleźć funkcję V taką, że

$$g^{ij} \nabla_i V \nabla_j V = 0 \quad (68)$$

zakładając, że

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (69)$$

Wypisać równanie definiowanych przez nią krzywych geodezyjnych.

Wskazówka Można przyjąć, że

$$V = t + R(r). \quad (70)$$

Rozwiązanie

Istotną własnością pola X jest,

$$\nabla_i X_j = \nabla_i \nabla_j V = \nabla_j \nabla_i V = \nabla_j X_i. \quad (71)$$

Zaiste, po opuszczeniu indeksu

$$(\nabla_X X)_j = X^i \nabla_i X_j = X^i \nabla_j X_i = \frac{1}{2} \nabla_j (X^i X_i) = \frac{1}{2} \nabla_j (g^{ij} \nabla_i V \nabla_j V) = \nabla_j (0) = 0. \quad (72)$$

Oznaczmy

$$f = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (73)$$

Warunek (68) przyjmuje postać

$$0 = (t + R)_{,i} (t + R)_{,j} g^{ij} = g^{tt} + (R')^2 g^{rr} = -\frac{1}{f} + (R')^2 f, \quad (74)$$

czyli

$$R' = \pm \frac{1}{f}. \quad (75)$$

Rozwiązania są dwa, wybierzmy jedno z nich, n.p.

$$R' = \frac{1}{f}. \quad (76)$$

A zatem, modulo stała, którą zawsze możemy dodać do V ,

$$R = \int dr \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} = \int dr \left(1 + \frac{2M}{r - 2M} \right) = \left(r + 2M \ln \frac{r - 2M}{2M} \right). \quad (77)$$

Równanie geodezyjnych, którego szukamy ma postać

$$\frac{dt}{ds} = X^t, \quad \frac{dr}{ds} = X^r, \quad \theta = \text{const}, \phi = \text{const}, \quad (78)$$

gdzie

$$X_t dt + X_r dr = dV = dt + R' dr, \quad (79)$$

a więc

$$X^t = g^{tt} = -\frac{1}{f}, \quad X^r = g^{rr} R' = f R' = 1 \quad (80)$$

A zatem równanie przyjmuje postać

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{f} = -\frac{r}{r - 2M}. \quad (81)$$