# Zadania z OTW
## seria 1

**Zadanie 1**.

W $\mathbb{R}^{n+1}$ dany jest tensor (metryczny)

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + ... + dx^n \otimes dx^n. \tag{1}$$

Obliczyć pochodną Lie'go:

$$\mathcal{L}_X g_M \tag{2}$$

względem dowolnego pola wektorowego

$$X = X^i \partial_i. \tag{3}$$

Wykazać, że

$$\mathcal{L}_X g_M = (X_{i,j} + X_{j,i}) dx^i \otimes dx^j \tag{4}$$

gdzie "$_{,i}$ " oznacza $\frac{\partial}{\partial x_i}$, oraz

$$X_i := g_{ij} X^j. \tag{5}$$

**Zadanie 2**. Zastosować wynik poprzedniego zadania do pola wektorowego $X_{(ij)}$ zdefiniowanego przez dowolnie ustalone liczby $i = 0, 1, ..., n$ oraz $j = 0.1, ..., n$,

$$X_{(ij)} := g_{ik} x^k \partial_j - g_{jk} x^k \partial_i. \tag{6}$$

Wykazać, że

$$\mathcal{L}_{X_{(ij)}} g_M = 0. \tag{7}$$

**Zadanie 3**. Obliczyć komutator

$$[X_{(ij)}, X_{(kl)}] \tag{8}$$

dla pól wektorowych $X_{(ij)}, X_{(kl)}$ zdefiniowanych w poprzednim zadaniu.

**Zadanie 4**. Wykazać, że pola wektorowe $X_{(ij)}$ zdefiniowane w Zadaniu 2 są styczne do powierzchni $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, takiej, że

$$g_{ij} x^i x^j = \text{const}. \tag{9}$$

**Zadanie 5**. Obliczyć kombinacje liniowe ze stałymi współczynnikami pól wektorowych $X_{(ij)}$, które są styczne do powierzchni $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$, takiej, że

$$x^0 - x^n = 0. \tag{10}$$

**Zadanie 6**. W $\mathbb{R}^n$ dana jest forma różniczkowa

$$\omega = \omega_i dx^i. \tag{11}$$

Udowodnić, ze dla dowolnych pól wektorowych $X$ oraz $Y$, różniczka zewnętrzna $d$ formy spełnia

$$d\omega\left(X, Y\right) = X\left(\omega\left(Y\right)\right) - Y\left(\omega\left(X\right)\right) - \omega\left(\left[X, Y\right]\right) \tag{12}$$

**Zadanie 7**. W każdym punkcie $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dana jest baza $e_1, ..., e_n \in T_{\vec{x}\mathbb{R}^n}$ oraz baza dulana $e^1, ..., e^n \in T^*_{\vec{x}\mathbb{R}^n}$. Dane też są funkcje

$$f_{ij}{}^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

takie, ze

$$[e_i, e_j] = f_{ij}{}^k e_k. \tag{13}$$

Obliczyc funkcje $g^k{}_{ij}$ takie ze

$$de^i = g^i{}_{kl} e^k \wedge e^l. \tag{14}$$

**Zadanie 8**. Dla pól wektorowych i 1-form z poprzedniego zadania obliczyć

$$\mathcal{L}_{e_i} e^j. \tag{15}$$

Wskazówka:

$$\mathcal{L}_X \omega = X \lrcorner d\omega + d\left(X \lrcorner \omega\right). \tag{16}$$