Zadania z OTW
seria 2

Zadanie 1.

Generatorem translacji odwrotnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy pole wektorowe

$$T^a \partial_a := \left(2 \left(t_b x^b \right) x^a - \left(x_b x^b \right) t^a \right) \partial_a \tag{1}$$

gdzie $t^a \partial_a$ to pole wektorowe generator (zwykłej) translacji

$$t^a = \text{const} \tag{2}$$

a index "a"jest obniżany tensorem metrycznym

$$g_{\mathrm{E}} = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \tag{3}$$

czyli

$$t^1 = t_1,\ t^2 = t_2,\ t^3 = t_3,\ \ x^1 = x_1,\ x^2 = x_2,\ x^3 = x_3. \tag{4}$$

Obliczyć pochodną Lie'go $\mathcal{L}_T g_{\mathrm{E}}$ i wykazać, że

$$\mathcal{L}_T g_{\mathrm{E}} = 4(x_a t^a) g_{\mathrm{E}}. \tag{5}$$

Zadanie 2. Rozważmy odwzorowanie inwersji

$$\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

$$\psi(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \tag{7}$$

Obliczyć pchnięcie $\psi_* t$ stałego pola wektorowego (2). Porównać wynik z polem wektorowym (1).

Zadanie 3. Obliczyć potok

$$\psi_\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

pola wektorowego T (1) w przypadku

$$t = \partial_z. \tag{9}$$

Obliczyć cofnięcie tensora g_{E} (3) potokiem ψ_τ, czyli tensor $\psi^*_\tau g_{\mathrm{E}}$. Wykazać, że

$$\psi^*_\tau g_{\mathrm{E}} \ = \ \frac{1}{1 + 2\tau z + \tau^2 z^2} g_{\mathrm{E}}. \tag{10}$$

Przypomnienie: $\psi_\tau^*(df \otimes df) = d(f \circ \psi_\tau) \otimes d(f \circ \psi_\tau)$

Zadanie 4. Rozważmy 5-cio wymiarową przestrzeń Minkowskiego (M_{M}, η),

$$M_{\mathrm{M}} = \mathbb{R}^5 \tag{11}$$
$$\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz + dw \otimes dw \tag{12}$$

Rozważmy powierzchnię

$$M_{\mathrm{dS}} \subset \mathbb{R}^5 \tag{13}$$

zdefiniowaną równością

$$\eta_{ij} x^i x^j = R^2, \qquad R = \mathrm{const.} \tag{14}$$

Jest to zanurzenie przestrzeni de Sittera. Obliczyć tensor g indukowany na M_{dS} przez tensor η. Znaleźć w M_{dS} pole wektorowe ξ, które spełnia

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \tag{15}$$

Ile takich pól łatwo jest skonstruować?
Wskazówka: Wykorzystać pola wektorowe X_{ij} w M_{M} dane wzorem

$$X_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i \tag{16}$$

gdzie indeksy zostały obniżone metryką η.

Zadanie 5. Dla każdej funkcji

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{17}$$

definiujemy 2-formę różniczkową

$$\omega_f := \frac{f_{,1} dx^2 \wedge dx^3 + f_{,2} dx^3 \wedge dx^1 + f_{,3} dx^1 \wedge dx^2}{\sqrt{(f_{,1})^2 + (f_{,2})^2 + (f_3)^2}} \tag{18}$$

wszędzie, gdzie

$$df \neq 0. \tag{19}$$

Funkcja f zadaje także powierzchnię $S_f \subset \mathbb{R}^3$, taką że

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0. \tag{20}$$

W dalszej części zadania rozważ następujące 3 przykłady funkcji f:

$$f(x^1, x^2, x^3) = x^1,\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}. \tag{21}$$

Dla dowolnej funkcji $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sprowadź całkę z 1-formy $h\omega_f$,

$$\int_{S_f} h\omega_f \tag{22}$$

do zwykłej całki po odpowiednim obszarze w $\mathbb{R}^2$. Dla której orientacji powierzchni S_f całka (22) jest dodatnia dla każdej dodatniej funkcji h?

Zadanie 6. Dana jest 1-forma

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$$

w $\mathbb{R}^3$. Wyraź całkę

$$\int_C d\omega \tag{23}$$

po wnętrzu sześcianu

$$C := [0,1]^3 \tag{24}$$

przez całki z ω po ścianach sześcianu C:

$$[0,1] \times [0,1] \times \{0\}, \quad [0,1] \times [0,1] \times \{1\}, \dots . \tag{25}$$