

Zadania z OTW
seria 3
na 100-lecie
(poprawna - bo jednak było i jest dobrze)

Zadanie 1. Na n -wymiarowej rozmaitości dane jest pole tensorowe

$$g = g_{ij}e^i \otimes e^j, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (1)$$

oraz pole ko-reperów $(e^1, \dots, e^n)$ takie, że

$$g_{ij} = \text{const.} \quad (2)$$

Obliczyć 1-formę koneksji $(\Gamma^i_j)_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$, zakładając, że spełnia poniższe dwa warunki:

- jest bez-torsyjna, czyli

$$de^i + \Gamma^i_j e^j \wedge e^j = 0 \quad (3)$$

- oraz zachowuje tensor g , czyli

$$\nabla_Y g = 0 \quad (4)$$

dla każdego wektora Y stycznego do M w dowolnym punkcie.

Zakładamy też, że macierz $(g_{ij})_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$ jest maksymalnego rzędu.

Odpowiedź (sprawdź, że jest opravdziwa!):

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (f_{ijk} + f_{jki} - f_{kij}) e^k$$

gdzie funkcje

$$f_{ijk} = f_{i[jk]}$$

zdefiniowane są przez rozkład

$$de^i = \frac{1}{2} f^i_{jk} e^j \wedge e^k, \quad (5)$$

a indeksy zostały obniżone tensorem g_{ij} ,

$$\Gamma_{ij} := g_{ik} \Gamma^k_j, \quad f_{ijk} := g_{il} f^l_{jk}. \quad (6)$$

Zadanie 2. Punktem wyjścia do tego zadania jest „Odpowiedź” do zad. 1. Rozważmy szczególny przypadek zadania 1, w którym $n = 3$, oraz

$$de^1 = e^2 \wedge e^3, \quad de^2 = e^3 \wedge e^1, \quad de^3 = e^1 \wedge e^2. \quad (7)$$

i) Sprawdzić, że spełnione są warunki konsystencji

$$d(e^2 \wedge e^3) = d(e^3 \wedge e^1) = d(e^1 \wedge e^2) = 0. \quad (8)$$

ii) Obliczyć 1-formę koneksji Γ^i_j .

iii) Obliczyć 2-formę krzywizny

$$\mathcal{R}^i_j = d\Gamma^i_j + \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j. \quad (9)$$

iv) Obliczyć tensor Ricciego, czyli

$$R_{ij} := R^k_{ikj} \quad (10)$$

gdzie

$$\mathcal{R}^i_j =: \frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l. \quad (11)$$

Znaleźć g_{ij} takie, że

$$R_{ij} = \frac{1}{3} R g_{ij} \quad R = \text{const}. \quad (12)$$

Zadanie 3*. Rozważmy przypadek zadania 1, w którym

$$de^i = c^i_{jk} e^j \wedge e^k, \quad c^i_{jk} = \text{const} \quad (13)$$

i) Wyprowadzić warunki konsystencji

$$d(c^i_{jk} e^j \wedge e^k) = 0. \quad (14)$$

ii) Obliczyć 1-formę koneksji Γ^i_j .

iii) Obliczyć 2-formę krzywizny

$$\mathcal{R}^i_j = d\Gamma^i_j + \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j \quad (15)$$

iv) Obliczyć tensor Ricciego, czyli

$$R_{ij} := R^k{}_{ikj} \quad (16)$$

gdzie

$$\mathcal{R}^i{}_j =: \frac{1}{2} R^i{}_{jkl} e^k \wedge e^l. \quad (17)$$

Poszukać g_{ij} takiego, że

$$R_{ij} = \frac{1}{n} R g_{ij}, \quad R = \text{const.} \quad (18)$$