**Zadania z OTW**
**seria 4**

**Zadanie 1**. Na rozmaitoiści $M$ o wymiarze 4 dany jest tensor metryczny

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t)\left(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3\right). \tag{1}$$

Wybrać ko-reper $(e^1, ..., e^4)$ i obliczyć: (i) 1-formę koneksji ${\Gamma^i}_j$, $i, j = 0, 1, 2, 3$ zakładając jej beztorsyjność oraz metryczność, (ii) 2-formę krzywizny ${\mathcal{R}^i}_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}e^k \wedge e^l$, (iii) tensor oraz skalar Ricciego

$$R_{ij} := {R^k}_{ikj}, \qquad R := g^{ij}R_{ij}. \tag{2}$$

**Zadanie 2**. Dany jest tensor metryczny

$$-f(r)dt \otimes dt + \frac{1}{f(r)}dr \otimes dr + \left(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2\right). \tag{3}$$

Wybrać ko-reper $(e^1, ..., e^4)$ i obliczyć: (i) 1-formę koneksji ${\Gamma^i}_j$, $i, j = 0, 1, 2, 3$ zakładając jej beztorsyjność oraz metryczność, (ii) 2-formę krzywizny ${\mathcal{R}^i}_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}e^k \wedge e^l$, (iii) tensor oraz skalar Ricciego

$$R_{ij} := {R^k}_{ikj}, \qquad R := g^{ij}R_{ij}. \tag{4}$$

**Zadanie 3**. Na $n$-wymiarowej rozmaitości $M$ dany jest tensor metryczny

$$g = g_{ij}e^i \otimes e^j$$

oraz odpowiadająca mu beztorsyjna i metryczna koneksja. Załóżmy, że funkcja $f$, spełnia

$$g^{ij}\nabla_i f \nabla_j f = \text{const}, \qquad \text{gdzie} \qquad g^{ik}g_{kj} := \delta^i_j. \tag{5}$$

Wykazać, że pole wektorowe

$$X^i := g^{ik}\nabla_k f, \tag{6}$$

jest geodezyjne, czyli

$$\nabla_X X = 0. \tag{7}$$

**Zadanie 4**. Wykazać następujący związek pomiędzy pochodną Liego oraz beztorsyjną pochodną kowariantną w działaniu na dowolną jednoformę $\omega = \omega_i e^i$

$$(\mathcal{L}_X \omega)_i = \nabla_X \omega_i + \omega_k \nabla_i X^k. \tag{8}$$

Uogólnić ten wzór do działania na dowolne pole tensorowe $T_{ij} e^i \otimes e^j$,

$$(\mathcal{L}_X T)_{ij} = \nabla_X T_{ij} + T_{kj} \nabla_i X^k + T_{ik} \nabla_j X^k. \tag{9}$$

Wykazać, że dla tensora metrycznego $g$ oraz beztorsyjnej i metrycznej koneksji, zachodzi

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i, \qquad X_i := g_{ik} X^k \tag{10}$$

**Zadanie 5**. Pole wektorowe $X$ zdefiniowane na $n$-wymiarowej rozmaitości $M$ jest polem Killinga tensora metrycznego $g$, czyli

$$\mathcal{L}_X g = 0. \tag{11}$$

Krzywa

$$[\tau_0, \tau_1] \ni \tau \mapsto p(\tau) \in M \tag{12}$$

jest krzywą geodezyjną beztorsyjnej i metrycznej koneksji. Wykazać, że

$$\frac{d}{d\tau} \left( X^i(p(\tau)) \dot{p}_i(\tau) \right) = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad \dot{p}_i := g_{ik} \dot{p}^k. \tag{13}$$

*Wskazówka.*

$$\frac{d}{d\tau} \left( X^i(p(\tau)) \dot{p}_j(\tau) \right) = \dot{p} \left( X^i \dot{p}_i \right) = \nabla_{\dot{p}} \left( X^i \dot{p}_i \right) \tag{14}$$

**Zadanie 6**. Na $n$-wymiarowej rozmaitości $M$ dany jest tensor metryczny

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j$$

oraz odpowiadająca mu beztorsyjna i metryczna koneksja. Załóżmy, że pole Killinga (patrz powyżej), spełnia

$$g_{ij} X^i X^j = \text{const}. \tag{15}$$

Wykazać, że wówczas pole wektorowe $X$ jest geodezyjne, czyli

$$\nabla_X X = 0. \tag{16}$$