**Zadania z OTW**
**seria 5 - kolokwialna**

**Zadanie 1**. Na 4-wymiarowej rozmaitości $M$ dany jest tensor metryczny

$$g = -f(r)dt \otimes dt + \frac{1}{f(r)} dr \otimes dr + r^2 \left( d\phi^1 \otimes d\phi^1 + d\phi^2 \otimes d\phi^2 \right) \tag{1}$$

gdzie funkcje $(\phi^1, \phi^2, t, r, )$ tworzą układ współrzędnych tam, gdzie

$$f(r) \neq 0. \tag{2}$$

Wybrać ko-reper $(e^1, ..., e^4)$ i obliczyć: (i) 1-formę koneksji $\Gamma^i{}_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ zakładając jej beztorsyjność oraz metryczność, (ii) 2-formę krzywizny $\mathcal{R}^i{}_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l$, (iii) tensor Ricciego $R_{ij}$ oraz skalar Ricciego $R$, czyli

$$R_{ij} := R^k{}_{ikj}, \qquad R := g^{ij} R_{ij}. \tag{3}$$

Znaleźć wszystkie funkcje $f$, dla których

$$R_{ij} = \Lambda\, g_{ij}, \qquad \text{and} \qquad \Lambda = \text{const}. \tag{4}$$

*Uwaga: To nie ma znaczenia dla rachunków, ale dla wizualizacji można przyjąć, że współrzędne $\phi^1, \phi^2$ przyjmują wartości w przedziale $[0, 2\pi)$ i parametryzują torus $T_2 = S_1 \times S_1$..*

**Zadanie 2**. Na 3-wymiarowej rozmaitości $M$ dany jest tensor metryczny

$$g = Ae^1 \otimes e^1 + Be^2 \otimes e^2 + Ce^3 \otimes e^3, \qquad A, B, C = \text{const}, \tag{5}$$

gdzie reper $(e^1, e^2, e^3)$ spełnia

$$de^1 = e^2 \wedge e^3, \quad de^2 = e^3 \wedge e^1, \quad de^3 = -e^1 \wedge e^2 + Ee^1 \wedge e^3 + Fe^2 \wedge e^3. \tag{6}$$

Obliczyć: (0) $E, F$, (i) 1-formę koneksji $\Gamma^i{}_j$, $i, j = 1, 2, 3$ zakładając jej beztorsyjność oraz metryczność, (ii) 2-formę krzywizny $\mathcal{R}^i{}_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l$, (iii) tensor Ricciego $R_{ij}$ oraz skalar Ricciego $R$, czyli

$$R_{ij} := R^k{}_{ikj}, \qquad R := g^{ij} R_{ij}. \tag{7}$$

Znaleźć wszystkie wartości stałych $A, B, C$, dla których

$$R_{ij} = \Lambda\, g_{ij}, \qquad \Lambda = \text{const}. \tag{8}$$

**Zadanie 3**. Przyspieszenie $a$ obserwatora zdefiniowanego przez linię całkową pola Killinga $\xi$ tensora metrycznego $g$ (czyli pola wektorowego takiego, że $\mathcal{L}_\xi g = 0$) zdefiniowane jest jako

$$a^i := \nabla_u u^i, \quad \text{gdzie} \quad u := \frac{1}{\sqrt{-\xi^i \xi_i}} \xi \tag{9}$$

jest czteroprędkością i zakładamy, że $\xi^i \xi_i < 0$. Wykazać, że

$$a_i = \frac{\nabla_i \left(\xi^j \xi_j\right)}{\xi^k \xi_k}. \tag{10}$$

Obliczyć przyspieszenie $a$ dla pola Killinga

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \tag{11}$$

w przypadku metryki $g$:
(i)

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \otimes dt + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr \otimes dr + r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)\, d\phi \otimes d\phi\right), \tag{12}$$

(ii)

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt \otimes dt + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} dr \otimes dr + r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)\, d\phi \otimes d\phi\right), \tag{13}$$

gdzie $M$ oraz $\Lambda$ są stałe. W przypadku (i) jaka jest asymptotyka $a$ dla dużych $r$, a jaka jest granica wielkości $a^i a_i$ gdy $r \to 2M$? W przypadku (ii) dla jakiej wartości współrzędnej $r$ odpowiadający jej obserwator porusza się po geodezyjnej?

**Zadanie 4**. Udowodnij następującą implikację

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \Lambda g_{ij} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \text{const}, \tag{14}$$

gdzie $R_{ij}$ jest tensorem Ricciego a $R$ skalarem Ricciego tensora metrycznego $g$.