Zadania z OTW
seria 6 - Sylwestrowa

Zadanie 1. Czasoprzestrzeń de Sittera $M_{\rm dS}, g_{\rm dS}$ może być przedstawiona jako powierzchnia zdefiniowana równaniem

$$-(Z^0)^2 + (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^2 + (Z^4)^2 = R^2, \qquad R = \mathrm{const} \tag{1}$$

w 5-wymiarowej czasoprzestrzeni (M_5, η), gdzie

$$M = \mathbb{R}^5 \tag{2}$$

oraz

$$\eta = -(dZ^0)^2 + (dZ^1)^2 + (dZ^2)^2 + (dZ^3)^2 + (dZ^4)^2. \tag{3}$$

Oblicz tensor metryczny $g_{\rm dS}$ indukowany na $M_{\rm dS}$ przez η we współrzędnych (t, r, θ, ϕ) parametryzujących część powierzchni :

$$Z^0 = \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{sh}\frac{t}{R}, \quad Z^1 = \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{ch}\frac{t}{R}, \tag{4}$$

$$Z^2 = r\cos\theta, \quad Z^3 = r\sin\theta\cos\phi, \quad Z^4 = r\sin\theta\sin\phi. \tag{5}$$

Zadanie 2. Utrzymując w mocy założenia i oznaczenia z poprzedniego zadania wykazać że pole wektorowe

$$Z^0\partial_{Z^1} + Z^1\partial_{Z^0} \tag{6}$$

jest styczne do $M_{\rm dS}$ i jego ograniczenie ξ do $M_{\rm dS}$ definiuje pole Killinga tensora metrycznego $g_{\rm dS}$. Znaleźć we współrzędnych (t, r, θ, ϕ) postać pola wektorowego ξ. Dla jakiej wartości współrzędnej r linia całkowa pola ξ staje się czasową linią geodezyjną, a dla jakiej $\xi^\alpha\xi_\alpha = 0$?

Dla ustalenia położenia geodezyjnej czasowej można wykorzystać wzór na przyspieszenie obserwatora Killinga

$$a_\mu = \frac{(\xi^\alpha\xi_\alpha)_{,\mu}}{2\xi^\beta\xi_\beta} \tag{7}$$

Zadanie 3. Utrzymując w mocy założenia i oznaczenia z Zadania 1 sparametryzować powierzchnię $M_{\rm dS}$ zmiennymi $(\tau, \chi, \theta, \phi)$ w następujący sposób:

$$Z^0 = R\mathrm{sh}\frac{\tau}{R}, \quad Z^1 = R\mathrm{ch}\frac{\tau}{R}\cos\chi, \tag{8}$$

$$Z^2 = R\,\mathrm{ch}\frac{\tau}{R}\,\sin\chi\,\cos\theta, \quad Z^3 = R\,\mathrm{ch}\frac{\tau}{R}\,\sin\chi\,\sin\theta\,\cos\phi \quad Z^4 = R\,\mathrm{ch}\frac{\tau}{R}\,\sin\chi\,\sin\theta\,\sin\phi \tag{9}$$

1) Wyrazić w tych współrzędnych pole Killinga ξ, czasową linię geodezyjną oraz krzywą zerową z Zadania 2.

2) Znaleźć funkcję T zdefiniowaną na powierzchni M_{dS} taką, że

$$\frac{\partial}{\partial\chi}T = \frac{\partial}{\partial\theta}T = \frac{\partial}{\partial\phi}T = 0 \tag{10}$$

oraz

$$g_{\mathrm{dS}} = f(T)\left(-dT^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right). \tag{11}$$

Jaki jest zakres zmienności funkcji T? Znaleźć horyzont zdarzeń obserwatora o linii świata

$$\chi = 0. \tag{12}$$

Porównać z krzywymi zerowymi z Zadania 2.