Zadania z OTW
Seria 7 - Noworoczna

Zadanie 1. Dany jest tensor metryczny „Schwarzschilda- de Sittera"

$$g = -(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3})^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{1}$$

Obliczyć skalar

$$K(r) = R_{ijkl}R^{ijkl} \tag{2}$$

i znaleźć wartości r dla których funkcja K nie jest zdefiniowana.

Dla ułatwienia podajemy 2-formę krzywizny $\mathcal{R}^i{}_j$ dla metryk tej klasy, czyli dla

$$g = -e^{\Phi(t,r)}dt^2 \ + \ e^{\Psi(t,r)}dr^2 \ + \ r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{3}$$

w reperze

$$e^1 = e^{\Phi}dt,\ e^2 = e^{\Psi}dr,\ e^3 = rd\theta,\ e^4 = r\sin\theta d\phi. \tag{4}$$

2-forma krzywizny wynosi:

$$\mathcal{R}^i{}_j = \frac{1}{2}R^i{}_{jkl}e^k \wedge e^l \tag{5}$$

$$\mathcal{R}_{12} = \left(e^{-2\Psi}\left(-\Psi_r\Phi_r + (\Phi_r)^2 + \Phi_{rr}\right) + e^{-2\Phi}\left(\Psi_t\Phi_t - (\Psi_t)^2 - \Psi_{tt}\right)\right)e^1 \wedge e^2, \tag{6}$$

$$\mathcal{R}_{13} = e^{-2\Psi}\frac{\Phi_r}{r}e^1 \wedge e^3 + e^{-\Psi-\Phi}\frac{\Psi_t}{r}e^2 \wedge e^3,\ \ \mathcal{R}_{14} = e^{-2\Psi}\frac{\Phi_r}{r}e^1 \wedge e^4 + e^{-\Psi-\Phi}\frac{\Psi_t}{r}e^2 \wedge e^4, \tag{7}$$

$$\mathcal{R}_{23} = e^{-2\Psi}\frac{\Psi_r}{r}e^2 \wedge e^3 + e^{-\Psi-\Phi}\frac{\Psi_t}{r}e^1 \wedge e^3,\ \ \mathcal{R}_{24} = e^{-2\Psi}\frac{\Psi_r}{r}e^2 \wedge e^4 + e^{-\Psi-\Phi}\frac{\Psi_t}{r}e^1 \wedge e^4, \tag{8}$$

$$\mathcal{R}_{34} = \frac{1 - e^{-2\Psi}}{r^2}e^3 \wedge e^4. \tag{9}$$

Uwaga, tam gdzie współczynnik przy dt^2 w (1) jest dodatni należy w metryce (3) zamienić $r \leftrightarrow t$.

Zadanie 2. Rozważmy tensor metryczny Schwarzschilda

$$g = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \qquad M = \text{const} > 0, \tag{10}$$

w obszarze, w którym

$$1 - \frac{2M}{r} > 0. \tag{11}$$

Zakładamy, że pole wektorowe ∂_t jest skierowane w przyszłość.

Dokonać transformacji tensora metrycznego do współrzędnych (v, r, θ, ϕ), gdzie funkcja v jest zdefiniowana wzorem

$$dt = dv - \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}. \tag{12}$$

Wykazać, że współrzędne te pozwalają rozszerzyć dziedzinę metryki (10) do obszaru zawierającego powierzchnię

$$1 - \frac{2M}{r} = 0 \tag{13}$$

Czy punkt materialny może przedostać się z obszaru

$$1 - \frac{2M}{r} < 0 \tag{14}$$

do obszaru

$$1 - \frac{2M}{r} > 0? \tag{15}$$

Jeśli nie, to jest to horyzont czarnej dziury.

Co w rozwiązaniu zadania zmieniłaby zmiana znaku w (12), czyli transformacja do współrzędnych (w, r, θ, ϕ) zdefiniowanych wzorem

$$dt = dw + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}? \tag{16}$$

Zadanie 3. Znaleźć postać geodezyjnej czasowej w metryce Schwarzschilda we współrzędnych (v, r, θ, ϕ), zkładając

$$\theta = \text{const} = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

i korzystając ze stałych ruchu zdefiniowanych przez iloczyny

$$E := -u^\mu T_\mu, \quad L := u^\mu \Phi_\mu, \tag{18}$$

gdzie

$$T = \partial_v, \qquad \Phi = \partial_\phi \tag{19}$$

to pola Killinga, a u to czteroprędkość punktu poruszającego się po rzeczonej geodezyjnej.

Czy geodezyjna dociera w skończonej wartości czasu własnego do punktu, w którym

$$r = 0? \tag{20}$$