

Zadania z OTW
Seria 8

Zadanie 1. Zapisać wynik Zadania 3 z Serii 7 w postaci

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r; L) = \frac{1}{2}E^2. \quad (1)$$

Zbadać przebieg potencjału efektywnego V jako funkcji r : granice $r \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, oraz punkty ekstremalne r_- , r_+ gdzie

$$r_- \leq r_+, \quad (2)$$

wykazać, że r_- jest lokalnym minimum, a r_+ lokalnym maksimum, z wyjątkiem przypadku, gdy są sobie równe.

Zadanie 2. W oparciu o wyniki poprzedniego zadania zbadać stacjonarne i niestacjonarne orbity kołowe w czasoprzestrzeni Schwarzschilda. W szczególności, wykazać że:

(i) promieniem orbity stabilnej jest r_+ , który zawsze spełnia

$$6M \leq r_+, \quad (3)$$

,

(ii) promieniem orbity niestabilnej jest r_- , który zawsze spełnia

$$3M \leq r_- \leq 6M. \quad (4)$$

.

Zadanie 3. W oparciu o wyniki poprzednich zadań zbadać energię E orbity kołowej w czasoprzestrzeni Schwarzschilda ja funkcję promienia $E(r)$. W szczególności:

(i) obliczyć maksymalną energię wiązania orbity stabilnej;

(ii) wykazać, że energia orbity niestabilnej

$$E(r) \rightarrow \infty \quad (5)$$

gdy $r_- \rightarrow 3M$.

(iii) wykazać, że gdy promień orbity niestacjonarnej

$$r_- > 4M \quad (6)$$

wówczas

$$E(r_-) < 1, \quad (7)$$

a więc punkt materialny znajdujący się na tej orbicie nie odleci do nieskończoności przy lekkim zaburzeniu jego ruchu.

Zadanie 4. W oparciu o wyniki Zadania 1 zanalizować możliwe rodzaje geodezyjnych czasowych w stacjonarnej czasoprzestrzeni Schwarzschilda.

Zadanie 5. Czy równanie (1) z Zadania 1 stosuje się także do obszaru

$$r < 2M \tag{8}$$

czasoprzestrzeni o tensorze metrycznym Schwarzschilda? Jeśli tak, to czy zabrania ono przejście geodezyjnej czasowej do obszaru

$$r > 2M. \tag{9}$$

Jeśli nie, to jak to wytłumaczyć?