Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXIII, 22 IV 2013 r.

Zadanie 1. Niech k będzie niezerowym przemiennym pierścieniem, a B i C bazami wolnego k-modułu M. Udowodnij że, jeśli α_B i α_C są macierzami formy kwadratowej $\alpha\colon M \to k$ odpowiednio w bazach B i C, to $\alpha_B = M_{CB}(\mathrm{id})^T \alpha_C M_{CB}(\mathrm{id})$, gdzie elementy macierzowe M_{cb} macierzy $M_{CB}(\mathrm{id})$ są zdefiniowane przez $b =: \sum_{c\in C} cM_{cb}$.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ dla którego podane formy kwadratowe $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ są dodatnio określone:

a) $Q(\mathbf{x}) = 5\,x_1^2 + x_2^2 + \lambda\,x_3^2 + 4\,x_1x_2 - 2\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$,

b) $Q(\mathbf{x}) = 2\,x_1^2 + x_2^2 + 3\,x_3^2 + 2\lambda\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3$,

c) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5\,x_3^2 + 2\lambda\,x_1x_2 - 2\,x_1x_3 + 4\,x_2x_3$,

d) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 + 6\,x_2x_3$.

Zadanie 3. Niech $\dim_{\mathbb{R}}(V) =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Udowodnij że forma kwadratowa $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ jest

a) dodatnio określona $\Leftrightarrow$ jej sygnatura to $(n, 0)$,

b) ujemnie określona $\Leftrightarrow$ jej sygnatura to $(0, n)$.

Zadanie 4. Poniższe rzeczywiste formy kwadratowe sprowadź do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a i podaj ich sygnatury:

a) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3\,x_3^2 + 4\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3$,

b) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2\,x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_1x_2 + 4\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3$,

c) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3\,x_3^2 - 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 - 6\,x_2x_3$,

d) $Q(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Zadanie 5. Oblicz sygnatury form kwadratowych z poprzedniego zadania metodą minorową.

Zadanie 6. Rozwiąż Zadanie 3 metodą minorową.