Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXVII, 27 V 2013 r.

Zadanie 1. Niech V będzie skończeniewymiarową zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny. Udowodnij że $\forall\, f \in \mathrm{End}(V) : \ker f = \ker |f|$ oraz $\forall\, g \in \mathrm{GL}(V) : g \circ |g|^{-1}$ jest unitarny. Pokaż też że $f \circ f^* = f^* \circ f \Rightarrow \mathrm{im} f = (\ker f)^{\perp}$.

Zadanie 2. Niech V będzie skończeniewymiarową zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny, a W jej podprzestrzenią. Udowodnij że każdą bazę ortonormalną W da się rozszerzyć do bazy ortonormalnej V. Korzystając z tego udowodnij że, jeżeli liniowe odwzorowanie $u\colon W \to V$ zachowuje iloczyn skalarny, to da się je rozszerzyć do unitarnego endomorfizmu V. Stąd i z poprzedniego zadania wywnioskuj istnienie rozkładu biegunowego.

Zadanie 3. Ze względu na standardowy iloczyn skalarny, znajdź rozkład biegunowy endomorfizmu $\mathbb{C}^2$ którego macierz w bazie kanonicznej jest postaci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym podaj rozkład spektralny endomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ którego macierz w bazie kanonicznej B jest postaci

$$f_{BB} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ będzie endomorfizmem którego macierz w bazie kanonicznej B przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym ma postać

$$f_{BB} := \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla wszystkich wartości własnych $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathrm{End}(\mathbb{C}^3)} f$ skonstruuj rzuty ortogonalne $p_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ na podprzestrzenie własne. Podaj rozkład spektralny f.

Zadanie 6. W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym odwzorowanie $h \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ w bazie kanonicznej jest zadane macierzą

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Podaj rozkład spektralny h.