Algebra z geometrią 2012/2013

Kolokwium próbne
J. de Lucas

Zadanie 1. (Podprzestrzenie własne i szeregi potęgowe endomorfizmów.) Znajdź wszystkie wartości $a \in \mathbb{R}$ dla których spełniony jest warunek (6 punktów)

$$\exp\left[a\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Aby obliczyć $\exp aA$, gdzie

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

zakładamy, że A to macierz endomorfizmu $f_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ w bazach kanonicznych i wprowadzimy zmianę do bazy gdzie A ma postać Jordana i można łatwo obliczyć $\exp(aA)$. To wymaga obliczyć wartości własne i wektory własne odwzorowania liniowego macierzy A. Aby to zrobić, trzeba obliczyć wielomian charakterystyczny A, czyli

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \left|\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = (1-\lambda)(\lambda-i)(\lambda+i).$$

Wartości własne macierzy A to są pierwiastki tego wielomianu, czyli $\{1, i, -i\}$. Wtedy, $\mathrm{spec}_{M_3(\mathbb{C})}A = \{1, i, -i\}$ i $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_i \oplus V_{-i}$, gdzie $V_a = \ker(A - a\mathrm{I})$ dla $a = 1, i, -i$. Teraz możemy obliczyć wektory własne A.

Wektory własne z wartością własną $\lambda = 1$ są elementami przestrzeni $V_1 = \ker(A - \mathrm{I})$, czyli

$$\ker(A - \mathrm{I}) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elementy $\ker(A - \mathrm{I})$ to są rozwiązania układu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Więc,

$$-x - y = 0, \quad x - y = 0,$$

i z ma dowolną wartość. Z powyższych dwóch równań, wynika, że $x = y = 0$. Więc,

$$\ker(A - \mathrm{I}) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle.$$

Wektory własne z wartością własną $\lambda = i$ są elementami przestrzeni $V_i = \ker(A - i\mathrm{I})$, czyli

$$\ker(A - i\mathrm{I}) = \ker\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Znowu, elementy $\ker(A - i\mathrm{I})$ to są rozwiązania układu

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Więc,

$$-ix - y = 0, \quad x - iy = 0,$$

i $z = 0$. Z powyższych dwóch równań, wynika, że $x = iy$ i y jest dowolna. Więc,

$$\ker(A - i\mathrm{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} iy \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aby obliczyć wektory własne z wartością własną $\lambda = -i$ albo korzystamy znowu z powyższej metody, albo korzystamy z tego, że skoro

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

sprzężenie tego, jest

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Czyli

$$v_{-i} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

to wektor własny z wartością $-i$. Widać, że mamy bazę wektorów własnych

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{-i} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Taki wynik ma sens, skoro jest znane, macierze antysymetryczne są zawsze diagonalizowalne (nad $\mathbb{C}$).

Korzystając z tego, macierz morfizmu f_A w nowej bazie $B' = \{v_1, v_i, v_{-i}\}$ ma postać

$$(f_A)_{B'B'} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Teraz, przypominamy diagram zmiany bazy. Wiemy, że $f_A = I \circ f_A \circ I$ gdzie I to funkcja tożsamościowa. Jeżeli rozpatrujemy macierze tych endomorfizmów, to

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "(f_A)_{B'B'}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "I_{B'B}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "I_{BB'}"] \arrow[r, "(f_A)_{BB}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

gdzie $(f_A)_{BB}$ to macierz endomorfizmu f_A w bazach kanonicznych, czyli A, macierz $(f_A)_{B'B'}$ to macierz endomorfizmu f_A w bazach B' i $I_{BB'}$ to macierz zmiany bazy od B do B' i $I_{B'B}$ to macierz zmiany bazy od B' do B, czyli macierz funkcji tożsamościowej od B do B' i odwrotnie. Można zauważyć, że kolumny macierzy $I_{B'B}$ są obrazami elementów bazy B' we współrzędnych bazy B. Czyli

$$I_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wówczas, $I_{BB'}$ to

$$I_{BB'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Więc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teraz, mamy, że

$$\exp(aA) = (I_{B'B} a (f_A)_{B'B'} I_{BB'}) = I_{B'B} \exp(a(f_A)_{B'B'}) I_{BB'}.$$

Możemy teraz obliczyć $\exp(a(f_A)_{B'B'})$. To jest prostsze niż obliczyć $\exp(aA)$ bo $(f_A)_{B'B'}$ jest macierzą górnotrójkątną. Więc,

$$\exp(aA) = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left(a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(aA) = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^{ai} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ai} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i

$$\exp(aA) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

Z tego,

$$\exp(aA) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\cos a + \sin a = -1, \qquad \sin a - \cos a = 1.$$

Więc,

$$2 \sin a = 0 \Rightarrow \sin a = 0, \quad 2 \cos a = 2 \Rightarrow \cos a = -1$$

i $a = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.