Twierdzenie Bezouta i liczby zespolone

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Ustal dla których $a, b \in \mathbb{R}$ można podzielić $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 - 3\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} - b$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 3\mathfrak{X} + 2$. Oblicz a i $b \in \mathbb{Z}_5$ jeżeli zakładamy, że f_1 i f_2 są wielomianami o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$.

Ćwiczenie 2. Za pomocą algorytmu Euklidesa dla wielomianów, podaj największy wspólny dzielnik wielomianów

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 - 2\mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^3 - \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X} - 2, \qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 3\mathfrak{X} + 2$$

i

$$f_3(\mathfrak{X}) = -\mathfrak{X}^5 + \mathfrak{X}^4 - \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X} + 1, \qquad f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 4\mathfrak{X} + 3$$

o współczynnikach w $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie 3. Niech $|z|$ będzie modułem liczby zespolonej $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, czyli $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Udowodnij, że dla liczby zespolonej $z \neq -|z|$ mamy, że

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}.$$

Korzystając z tego, oblicz rozwiązania równań

$$z^4 = -7 + 24i, \; z^2 + (5 - 3i)z + 4 - 7i = 0, \; z^3 + (8 + i)z^2 + (27 + 8i)z + 36 + 15i = 0.$$

Ćwiczenie 4. Niech z_1, z_2, z_3, będą liczbami zespolonymi takimi, że $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$. Udowodnij, że

$$|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|.$$

Ćwiczenie 5. Oblicz i przedstaw w postaci kanonicznej

$$\sum_{k=1}^{100} (1 + i)^k, \qquad \sum_{k=0}^{1000} \frac{1}{(k + i)(k - 1 + i)}.$$