Suma i przecięcie podprzestrzeni, przestrzeń ilorazowa

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dowieść, że jeśli U i V są podprzestrzeniami n-wymiarowej przestrzeni wektorowej oraz $\dim U = r$ i $\dim V = s$, to

$$\max(0, r+s-n) \leq \dim(U \cap V) \leq \min(r,s), \quad \max(r,s) \leq \dim(U+V) \leq \min(r+s, n).$$

Podać przykłady pokazujące, że każda z tych nierówności może być równością.

Ćwiczenie 2. Podać bazę sumy i części wspólnej powłok liniowych $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ oraz $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$:

i)

$$a_1 = (1,2,1), \quad a_2 = (1,1,-1), \quad a_3 = (1,3,3),$$
$$b_1 = (1,2,2), \quad b_2 = (2,3,-1), \quad b_3 = (1,1,-3).$$

ii)

$$a_1 = (-1,6,4,7,-2), \quad a_2 = (-2,3,0,5,-2), \quad a_3 = (-3,6,5,6,-5),$$
$$b_1 = (1,1,2,1,-1), \quad b_2 = (0,-2,0,-1,-5), \quad b_3 = (2,0,2,1,-3).$$

iii)

$$a_1 = (1,1,0,0,-1), \quad a_2 = (0,1,1,0,1), \quad a_3 = (0,0,1,1,1),$$
$$b_1 = (1,0,1,0,1), \quad b_2 = (0,2,1,1,0), \quad b_3 = (1,2,1,2,-1).$$

Ćwiczenie 3. Niech podprzestrzenie $U, V \subset \mathbb{R}^n$ będą określone układami równań

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \qquad x_1 = \ldots = x_n.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ oraz wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na podprzestrzeń U równolegle do V i na podprzestrzeń V równolegle do U.

Ćwiczenie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \langle (1,1,1,1), (-1,-2,0,1) \rangle, \qquad V = \langle (-1,-1,1,-1), (2,2,0,1) \rangle.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4,2,4,4)$ na podprzestrzeń U równolegle do V.

Ćwiczenie 5. Wykazać, że przestrzeń macierzy $M_n(\mathbb{R})$ jest sumą prostą podprzestrzeni macierzy symetrycznych i podprzestrzeni antysymetrycznych oraz wynaczyć rzut macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

na każdą z tych podprzestrzeni równolegle do drugiej z nich.

Ćwiczenie 6. Wyznaczyć wymiary sumy i części wspólnej powłok liniowych układów wektorów $\mathbb{R}^4$:

i)
$$S = \langle (1,2,0,1), (1,1,1,0) \rangle,$$
$$T = \langle (1,0,1,0), (1,3,0,1) \rangle.$$

ii)
$$S = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,3,1,3) \rangle,$$
$$T = \langle (1,2,0,2), (1,2,1,2), (3,1,3,1) \rangle.$$

iii)
$$S = \langle (2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1) \rangle,$$
$$T = \langle (3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0) \rangle.$$

Ćwiczenie 7. Określ strukturę przestrzeni $\mathbb{R}^2/W$, gdzie $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Znajdź warstwy $[(1, 1)]$, $[(3, 4)]$, $[(1, 1)] + [(3, 4)]$, $5[(3, 4)]$ oraz podaj interpretację geometryczną tych warstw.

Ćwiczenie 8. Opisz warstwy przestrzeni V/W oraz podaj bazę tej przestrzeni, jeśli:

- $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : a_1 = a_2 = 0\}$.
- $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : a_2 = 0\}$.
- $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : a_1 = 4a_2 = 5a_3\}$.
- $V = C([0, 1], \mathbb{R})$, $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.
- $V = C([0, \infty), \mathbb{R})$, $W = \{f \in C([0, \infty), \mathbb{R}) : a_1 = a_2 = 0\}$.