Przestrzeń sprzężona, anihililatory, formy dwuliniowe

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dowieść, że następujące funkcje są formami liniowymi przestrzeni wektorowej V:

$$\omega_1(w(\mathfrak{X})) = \int_0^1 P(x)w(x)dx, \quad w(\mathfrak{X}) \in V = \mathbb{R}_n[\mathfrak{X}], \text{ dla ustalonego } P(\mathfrak{X}) \in V$$

$$\omega_2(w(\mathfrak{X})) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k w}{dx^k}(1), \quad w(\mathfrak{X}) \in V = \mathbb{R}_n[\mathfrak{X}], \quad \text{gdzie } d^0 w/dx = w,$$

$$\omega_4(v) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \text{ dla ustalonych } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Ćwiczenie 2. Dana przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]$, sprawdź, czy następujące formy liniowe $\omega^1, \omega^2, \omega^3 \in \mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]^*$ postaci

$$\omega_1(P(\mathfrak{X})) = \int_0^1 P(x)dx, \qquad \omega_2(P(\mathfrak{X})) = \int_{-1}^1 P(x)dx, \qquad \omega_3(P(\mathfrak{X})) = \int_{-2}^0 P(x)dx.$$

tworzą bazę przestrzeni sprzężonej $\mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]^*$. Oblicz bazę P_1, P_2, P_3 przestrzeni $\mathbb{R}_2[\mathfrak{X}]$ taką, że

$$\omega^j(P_i) = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, \ldots, 3.$$

Oblicz Y°, gdzie

$$Y = \langle P_1 + P_3, P_2 \rangle.$$

Ćwiczenie 3. Zbadaj czy odwzorowanie $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ określa formę dwuliniową, jeśli:

a) $V := \mathbb{R}_n[x], \ \forall\, v, w \in V: \ \omega(v, w) := \int_0^1 v(x)w(x)\, dx,$

b) $V := \mathbb{R}_n[x], \ \forall\, v, w \in V: \ \omega(v, w) := \int_0^1 v'(x)w(x)\, dx,$

c) $V := \mathbb{R}^n, \ \forall\, v, w \in V: \ \omega(v, w) := v \cdot w,$ gdzie $\cdot$ to standardowy iloczyn skalarny.

Ćwiczenie 4. Czy każdą formę dwu-liniową $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci

$$b(x, y) = \omega_1(x)\omega_2(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

dla pewnych form-liniowych $\omega_1, \omega_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$?

Ćwiczenie 5. Dana baza

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oblicz bazę dualną $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ do tej bazy. Napisz formę dwuliniową

$$b(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \qquad x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3),$$

jako liniową kombinację form dwuliniowych

$$b^{ij}(x, y) = \theta^i(x)\theta^j(y), \qquad \text{dla } i, j = 1, \ldots, 3, \qquad x, y \in \mathbb{R}^2.$$