4.02.2014

EGZAMIN Z ALGEBRY I R

Uwagi. Kazde zadanie rozwiazujemy na oddzielnej kartce (ew. kartkach), a kazda kartke podpisujemy.

Zadanie 1 (4p.). W zaleznosci od parametru $p \in \mathbb{R}$ ustal zbiór rozwiazan ukladu równan

$$\begin{bmatrix} p-2 & p+1 & p+3 \\ 1 & p-1 & 2p-2 \\ -p & -p+3 & p+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2 (4p.). Niech $\mathbb{K}$ bedzie cialem. Rozwazmy odwzorowanie $\chi\colon \mathbb{K}_2[t] \to M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ dane wzorem

$$\chi(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = \alpha \mathbf{A}^2 + \beta \mathbf{A} + \gamma \mathbb{1}_2,$$

gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Niech $\mathscr{E} = \{t, t-3, t^2-16\}$ bedzie baza $\mathbb{K}_2[t]$, a

$$\mathscr{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

baza $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Znajdz macierz $[\chi]_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$.

Zadanie 3 (5p.). Niech $V = \left\{ \mathbf{A} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right) = 0 \right\}$. Wybierz jakas baze $\mathscr{B}$ przestrzeni V i uzupelnij ja do bazy $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Wyznacz baze przestrzeni V^* sprzezona do $\mathscr{B}$ i podaj w niej wspólrzedne funkcjonalu

$$V \ni \mathbf{A} \longmapsto \operatorname{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)$$

Zadanie 4 (3p.). Niech $V = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z-0 \right\}$ i $W = \operatorname{span}\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \right\}$. Podaj macierz rzutu na V wzdluz W w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5 (4p.). Niech odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma macierz w bazie standardowej

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Utozsamiajac $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$ (w standardowy sposób: $\mathbb{R}^2 \ni \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \longleftrightarrow 1 \in \mathbb{C}$ oraz $\mathbb{R}^2 \ni \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \longleftrightarrow \mathrm{i} \in \mathbb{C}$) otrzymujemy odwzorowanie $\widetilde{T}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Jakie warunki musza spelniac wspólczynniki a, b, c, d, aby $\widetilde{T}$ bylo odwzorowaniem $\mathbb{C}$-liniowym?

Rozwiazania

Rozwiazanie zadania 3. Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+2b & * \\ * & 3b+d \end{bmatrix},$$

a wiec

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A}\right) = a + 2b + 3b + 4d.$$

Tak wiec do V naleza macierze, których wspólczynniki spelniaja $a+2b+3b+4d=0$. Wybieramy przykladowa baze V:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

i uzupelniamy ja do bazy $\widetilde{\mathscr{B}}$ przestrzeni $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\mathscr{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Baza $\mathscr{B}^*$ sklada sie z trzech funkcjonalów ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 na V wyznaczonych przez nastepujace równania

$$\phi_1\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \phi_1\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad \phi_1\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0,$$
$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad \phi_2\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \phi_2\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0,$$
$$\phi_3\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad \phi_3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad \phi_3\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1.$$

Od razu widac, ze ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sa obcieciami do V funkcjonalów (na $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \delta, \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \gamma, \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \beta.$$

Dla $\mathbf{A} \in V$ mamy

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A}\right) = a + 3b + 3b + 4d = b - c \tag{$\star$}$$

(bo $a+2b+3b+4d=0$). Tak funkcjonal ($\star$) ma w bazie $\mathscr{B}^*$ wspólrzedne $(0,-1,1)$. □

Rozwiazanie zadania 4. Wybierzmy baze V:

$$V = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

i niech

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

W bazie $\mathscr{B}$ rzut na V wzdluz W ma macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech St bedzie baza standardowa $\mathbb{R}^3$. Mamy

$$[\mathrm{id}]^{\mathrm{St}}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$[\mathrm{id}]^{\mathscr{B}}_{\mathrm{St}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(obliczamy w pamieci próbujac wyrazic elementy bazy standardowej w bazie $\mathscr{B}$). Tak wiec macierz rzutu na V wzdluz W w bazie standardowej jest równa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadanie 6 (4p.)**.** Niech odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma macierz w bazie standardowej

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Utożsamiając $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$ (w standardowy sposób: $\mathbb{R}^2 \ni \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \longleftrightarrow 1 \in \mathbb{C}$ oraz $\mathbb{R}^2 \ni \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \longleftrightarrow \mathrm{i} \in \mathbb{C}$) otrzymujemy odwzorowanie $\widetilde{T}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Jakie warunki musza spelniac wspólczynniki a, b, c, d, aby $\widetilde{T}$ bylo odwzorowaniem $\mathbb{C}$-liniowym?

Proof. Mamy liniowy izomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ postaci

$$\phi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x + iy.$$

Korzystając z tego, zdefiniujemy

$$\widetilde{T}(x + yi) = \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x + iy). \tag{1}$$

Skoro zakładamy, że T jest liniowe nad $\mathbb{R}$ i ϕ jest liniowe nad $\mathbb{R}$, to $\widetilde{T}$ jest liniowe nad $\mathbb{R}$. Korzystając z tego wynika, że $\widetilde{T}$ jest liniowe nad $\mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\widetilde{T}(iz) = i\widetilde{T}(z), \tag{2}$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Ponieważ $\widetilde{T}$ jest liniowe nad $\mathbb{R}$, to (2) się spełnia dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy (2) się spełnia dla $z = 1$ i $z = i$, czyli dla pewnej bazy $\mathbb{C}$ jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$. Więc, dla $z = 1$ mamy, że

$$\widetilde{T}(i) = i\widetilde{T}(1) \to \phi \circ T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i\phi \circ T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \phi \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = i\phi \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to c + di = ia - b \to d = a, c = -b.$$

Warunek (2) dla $z = i$ wygląda następująco

$$\widetilde{T}(i \cdot i) = i\widetilde{T}(i) \to \phi \circ T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = i\phi \circ T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\phi \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = i\phi \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \to -a - bi = ic - d \to d = a, c = -b.$$

Podsumując, mamy, że $\widetilde{T}$ jest liniowe nad $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy $c = -b$ i $a = d$. □