Twierdzenie Bezouta i liczby zespolone

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Ustal dla których $a, b \in \mathbb{R}$ można podzielić $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 - 3\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} - b$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 3\mathfrak{X} + 2$. Oblicz a i $b \in \mathbb{Z}_5$ jeżeli zakładamy, że f_1 i f_2 są wielomianami o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$.

Rozwiązanie 2. Z twierdzenia dzielenia wielomianów, mamy, że

$$f_1(\mathfrak{X}) = g(\mathfrak{X})f_2(\mathfrak{X}) + r(\mathfrak{X}),$$

dla pewnych wielomiamów $g(\mathfrak{X})$ i $r(\mathfrak{X})$ gdzie $r(\mathfrak{X})$ ma stopień jeden, czyli $r(\mathfrak{X}) = c_1\mathfrak{X}+c_0$ dla $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$. Aby zagwarantować, że f_1 jest podzielny przez f_2, to musimy szukać a, b takich, że $r(\mathfrak{X}) = 0$.

Widać, że wielomian f_2 ma wszystkie swoje pierwiastki, tj. 1, 2, w $\mathbb{R}$. Więc, jeżeli wielomian f_1 można podzielić przez f_2, czyli $f_1(\mathfrak{X}) = g(\mathfrak{X})f_2(\mathfrak{X})$, to $f_1(1) = f_1(2) = 0$. Odwrotnie, jeżeli $f_1(1) = f_2(1) = 0$, to $r(1) = r(2) = 0$ i $r(\mathfrak{X}) = 0$. Krótko mówiąc,

$$f_1(\mathfrak{X}) \text{ jest podzielny przez } f_2(\mathfrak{X}) \Leftrightarrow f_1(1) = f_1(2) = 0.$$

Wówczas, w naszym przypadku musimy obliczyć wartości a, b, żeby $f_1(1) = f_1(2) = 0$. Korzystając ze schemata Hornera, czyli pisząc

$$f_1(\mathfrak{X}) = a_n\mathfrak{X}^n + a_{n-1}\mathfrak{X}^{n-1} + \ldots, a_1\mathfrak{X} + a_0 = (\ldots((a_n\mathfrak{X} + a_{n-1})\mathfrak{X} + a_{n-2})\mathfrak{X} + \ldots + a_1)\mathfrak{X} + a_0,$$

można obliczyć wartość wielomianu f_1 dla pewnej wartości ξ szybciej niż przez obliczenia wszystkich wyrazów f_1. Właśnie, obliczenia wartość wielomianu stopnia n dla $\mathfrak{X} = \xi$ wymaga $(n+1)(n+2)/2$ obliczeń. Natomiast, schemat Hornera wymaga $2n+1$. W naszym przypadku

$$f_1(\mathfrak{X}) = ((\mathfrak{X}^2 - 3)\mathfrak{X} + a)\mathfrak{X} - b.$$

Więc,

$$f_1(1) = -2 + a - b, \qquad f_1(2) = 2a + 4 - b.$$

Wówczas,

$$f_1(1) = -2 + a - b = 0, \qquad f_1(2) = 2a + 4 - b = 0.$$

Z tego

$$a - b = 2, \qquad 2a - b = -4$$

i $a = -6, b = -8$.

Jeżeli zakładamy, że f_1 i f_2 są wielomianami o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$, musimy najpierw sprawdzić, czy pierwiastki f_2 należą do $\mathbb{Z}_5$. Aby to zrobić, trzeba zauważyć, że wzór pierwiastków wielomianu drugiego stopnia o współczynikach w ciele $\mathbb{F}$ jest taki sam jak dla liczb rzeczywistych:

$$\xi_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Można sprawdzić, że pierwiastki wielomianu f_2 są tak samo jak w poprzednym przypadku. Z tego, procedura jest taka sama jak wcześniej. Na samym końcu dostajemy

$$a = 4, \qquad b = 2.$$

Ćwiczenie 3. Dane wielomiany o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$ wzorem

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 - (5+b)\mathfrak{X}^4 + (6-a+5b)\mathfrak{X}^3 + (5a-6b+ab)\mathfrak{X}^2 - a(6+5b)\mathfrak{X} + 6ab,$$

i $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} - 1$, ustal dla których $a, b \in \mathbb{R}$ można podzielić f_1 przez f_2.

Rozwiązanie 4. Z twierdzenia dzielenia wielomianów, mamy, że

$$f_1(\mathfrak{X}) = g(\mathfrak{X})f_2(\mathfrak{X}) + r(\mathfrak{X}),$$

dla pewnych wielomianów $g(\mathfrak{X})$ i $r(\mathfrak{X})$ gdzie $r(\mathfrak{X})$ ma stopień mniejszy od $f_2(\mathfrak{X})$. Więc, $r(\mathfrak{X})$ ma stopień dwa, czyli $r(\mathfrak{X}) = c_2\mathfrak{X}^2 + c_1\mathfrak{X} + c_0$ dla pewnych $c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$. Aby zagwarantować, że f_1 jest podzielny przez f_2, to musimy szukać a, b takich, że $r(\mathfrak{X}) = 0$.

Widać, że wielomian f_2 ma tylko jeden pierwiastek, tj. 1, w $\mathbb{R}$. Więc, jeżeli wielomian f_1 można podzielić przez f_2, to $f_1(1) = 0$. To warunek konieczny, ale nie wystarczający, aby zagwarantować, że $r(\mathfrak{X}) = 0$. W naszym przypadku, musimy obliczyć wartości a, b, żeby $f_1(1) = 0$. Korzystając ze schematu Hornera,

$$f_1(1) = 2ab - 2a - 2b + 2 = 2(b-1)(a-1) = 0.$$

Więc, $a = 1$ lub $b = 1$. Natomiast, to nie wystarczy. Aby zagwarantować, że f_1 jest podzielny przez f_2 możemy skorzystać z następującej metody. Zakładamy, że f_1 i f_2 są wielomianami o współczynnikach w ciele $(\mathbb{F}, 1, , +, \cdot)$, które spełnia, że $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$ i dzialania ciała $\mathbb{F}$ są tak samo na $\mathbb{R}$ jak działania $\mathbb{R}$ (mówi się, że $\mathbb{R}$ jest podciałem ciała $\mathbb{F}$). Na przykład, $\mathbb{R}$ jest podciałem $\mathbb{C}$. Zaletą ciała $\mathbb{C}$ jest to, że każdy wielomian jest rozkładalny jako mnożenie wielomianów pierwszego stopnia o współczynnikach w $\mathbb{C}$. Ponadto, jeżeli f_1 i f_2 mają współczynniki w $\mathbb{R}$ i można podzielić f_1 przez f_2 jako wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{R}$ to też można podzielić je jako wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{C}$.

Teraz mamy, że f_2 ma pierwiastki i i $-i$. Twierdzenie nierozkładalności Abla twierdzi, że jeżeli wielomian f o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}$ jest podzielny przez nierozkładalny wielomian g i mają wspólny pierwiastek, to wtedy f ma wszystkie pierwiastki g. Więc, jeżeli można podzielić f_1 przez f_2, to $f_2(i) = 0$ i z tego wynika, że $f_2(-i) = 0$. Wówczas,

$$f(i) = -5 - b - (5a - 6b + ab) + 6ab + (1 - (6 - a + 5b) - a(6 + 5b))i = 0.$$

Skoro $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$(a + 1)(b - 1) = 0, \qquad (b + 1)(a + 1) = 0.$$

Z $f(-i) = 0$ wynikają te same równania. Więc, mamy, że $a = -1$ i $b = 1$.

Ćwiczenie 5. Za pomocą algorytmu Euklidesa dla wielomianów, podaj największy wspólny dzielnik wielomianów

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 - 2\mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^3 - \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X} - 2, \qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 3\mathfrak{X} + 2$$

i

$$f_3(\mathfrak{X}) = -\mathfrak{X}^5 + \mathfrak{X}^4 - \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X} + 1, \qquad f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 4\mathfrak{X} + 3$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie 6. Aby obliczyć największy wspólny czynnik za pomocą algorytmu Euklidesa, trzeba obliczyć podzielenie z resztą f_1 przez f_2. Można udowodnić, że wtedy największy wspólny czynnik między f_1 i f_2 jest taki sam jak największy wspólny czynnik między f_2 i resztą dzielenia f_1 przez f_2. Z twierdzenia dzielenia wielomianów wynika, że ta reszta ma stopień jeden. Więc, ma postać $r(\mathfrak{X}) = c_1\mathfrak{X} + c_0$, gdzie $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ i

$$f_1(\mathfrak{X}) = g(\mathfrak{X})f_2(\mathfrak{X}) + r(\mathfrak{X})$$

dla pewnego wielomianu $g(\mathfrak{X})$. Skoro dla $\xi = 1$ i $\xi = 2$ mamy, że $f_1(1) = r(1)$, $f_2(2) = r(2)$, to

$$c_1 + c_2 = -4, \quad 0 = 2c_1 + c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 4, \quad c_2 = -8.$$

Teraz trzeba podzielić f_2 przez resztę. Widać, że wspólny czynnik to 2. Mamy, że

$$f_2(\mathfrak{X}) = g_2(\mathfrak{X})(4\mathfrak{X} - 8) + c_0'.$$

Widać, że $f_2(2) = 0$. Więc, $c_0' = 0$ i $4\mathfrak{X} - 8$ jest największy wspólny czynnik między f_1 i f_2.

Aby obliczyć największy wspólny czynnik za pomocą algorytmu Euklidesa wielomianów f_3 i f_4, trzeba obliczyć podzielenie z resztą f_3 przez f_4. Z twierdzenia dzielenia wielomianów wynika, że ta reszta ma stopień jeden. Więc, ma postać $r(\mathfrak{X}) = c_0\mathfrak{X} + c_1$ i

$$f_3(\mathfrak{X}) = g(\mathfrak{X})f_4(\mathfrak{X}) + r(\mathfrak{X})$$

dla pewnego wielomianu $g(\mathfrak{X})$. Skoro dla $\xi = 1$ i $\xi = 3$ mamy, że $f_3(1) = r(1)$, $f_3(3) = r(3)$, to

$$3c_1 + c_2 = -182, \quad 0 = c_1 + c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -91, \quad c_2 = 91.$$

Teraz trzeba podzielić f_4 przez resztę. Mamy, że

$$f_4(\mathfrak{X}) = 91g_2(\mathfrak{X})(-\mathfrak{X} + 1) + c_0'.$$

Widać, że $c_0' = f_4(1) = 0$. Więc, $-\mathfrak{X} + 1$ jest największym wspólnym czynnikiem między f_3 i f_4.

Ćwiczenie 7. Udowodnij, że dla liczby zespolonej $z \neq -|z|$ mamy, że

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||},$$

gdzie $|z|$ to moduł liczby zespolonej $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, czyli $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Korzystając z tego, oblicz rozwiązania równań

$$z^4 = -7 + 24i, \;\; z^2 + (5 - 3i)z + 4 - 7i = 0, \;\; z^3 + (8 + i)z^2 + (27 + 8i)z + 36 + 15i = 0.$$

Rozwiązanie 8. Widać, .ze

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||} \Leftrightarrow, z = \left(\pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}\right)^2.$$

Wówczas,

$$\left(\pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}\right)^2 = |z|\frac{(z + |z|)^2}{|z + |z||^2} = |z|\frac{z^2 + 2|z|z + |z|^2}{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)} = |z|\frac{z^2 + 2|z|z + |z|^2}{2|z|^2 + (z + \bar{z})|z|}.$$

Skoro $|z| \neq -z$, to $|z| \neq 0$ i

$$\left(\pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}\right)^2 = \frac{z^2 + 2|z|z + |z|^2}{2|z| + (z + \bar{z})} = \frac{z(z + 2|z| + \bar{z})}{2|z| + (z + \bar{z})} = z.$$

Trzeba zauważyć, że skoro $z + |z| \neq 0$ to $\mathrm{Re}(z + |z|) \neq 0$ i $z + \bar{z} + 2|z| \neq 0$.

a) Zdefiniujemy $w = z^2$, więc, $w^2 = -7 + 24i$. Korzystając z powyższego wzoru, mamy, że

$$w = \pm 5 \frac{-7 + 25 + 24i}{|-7 + 25 + 24i|} = \pm 5 \frac{3 + 4i}{|3 + 4i|} = \pm (3 + 4i)$$

Więc,

$$z_{\pm}^{1)} = \pm \sqrt{5} \frac{8 + 4i}{|8 + 4i|} = \pm \sqrt{5} \frac{2 + i}{|2 + i|} = \pm (2 + i)$$

i

$$z_{\pm}^{2)} = \pm \sqrt{5} \frac{2 - 4i}{|2 - 4i|} = \pm \sqrt{5} \frac{1 - 2i}{|1 - 2i|} = \pm (1 - 2i)$$

b) Aby rożwiązać $z^2 + (5 - 3i)z + 4 - 7i = 0$ korzystamy z wzoru

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Więc,

$$z_{\pm} = \frac{-5 + 3i \pm \sqrt{16 - 30i - 16 + 28i}}{2} = \frac{-5 + 3i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \frac{-5 + 3i \pm (-i + 1)}{2}$$

i

$$z_+ = -2 + i, \qquad z_- = -3 + 2i.$$

Wzory Vieta są zawsze prawdziwe dla liczb zespolonych. Lepiej sprawdzić za pomocą tych wzorów czy pomyliliśmy się.

c) Mamy

$$z^3 + (8 + i)z^2 + (27 + 8i)z + 36 + 15i = 0.$$

Istnieją wzory aby obliczyć piertwiastki wielomianów trzeciego i czwartego stopnia. Natomiast, jeżeli to możliwe, lepiej korzystać z innej metody, skoro takie wzory są ogólnie bardzo skomplikowane. Na przykład, możemy szukać pierwiastków postaci $z = p/q$ gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnymi pierwszymi. Jeżeli istnieje taki pierwiastek dla wielomianu $f(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^k$, to

$$0 = f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

i

$$\sum_{k=1}^{n} a_k p^k q^{n-k} = -a_0 q^n$$

Skoro $p, q \in \mathbb{Z}$ i liczby $a_k \in \mathbb{C}$ mają postać $a_k^R + a_k^I i$, gdzie $a_k^R, a_k^I \in \mathbb{R}$, to widać, że lewa strona jest podzielna przez p. To prawa strona też. Ponieważ q^n nie jest podzielny przez p to $-a_0$ ma być. To oznacza, że cześć rzeczywista i urojona są podzielne przez p. Tak samo można powiedzieć, że q podzieli część rzeczywistą i urojoną a_n.

Powyższy wynik sugeruje nam, że pierwiastek p/q dla naszego wielomianu ma $p = -3$ i $q = 1$. Właśnie, widać, że część urojona i rzeczywista liczby $36 + 15i$ są podzielne przez $p = -3$. Korzystając z tego,

$$z^3 + (8+i)z^2 + (27+8i)z + 36 + 15i = (z+3)(z^2 + (5+i)z + (12+5i)) = 0.$$

Pierwiastki $(z^2 + (5+i)z + (12+5i))$ można obliczyć za pomocą poprzedniej metody. Wówczas,

$$z = -3 + 2i, \qquad z = -2 - 3i.$$

Ćwiczenie 9. Niech z_1, z_2, z_3, będą liczbami zespolonymi takimi, że $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$. Udowodnij, że

$$|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|.$$

Rozwiązanie 10. W dowodzie wykorzystamy, że $|z|^2 = z\bar{z}$ dla dowolnej liczby zespolonej z. Ponieważ

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2,$$

więc $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 4$. Stąd mamy, że

$$\begin{gathered}|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|^2 = (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)(\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1\bar{z}_3 + \bar{z}_2\bar{z}_3) = \\ (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) + (z_1\bar{z}_1)z_2\bar{z}_3 + z_1(z_2\bar{z}_2)\bar{z}_3 + (z_1\bar{z}_1)z_3\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_1)(z_3\bar{z}_3) + z_1\bar{z}_2(z_3\bar{z}_3) \\ + (z_2\bar{z}_2)z_3\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1(z_3\bar{z}_3) + (z_2\bar{z}_2)(z_3\bar{z}_3) = 48 + 4(z_2\bar{z}_3 + z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1).\end{gathered}$$

Ponadto,

$$\begin{aligned}4|z_1 + z_2 + z_3|^2 &= 4(z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= 4(z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3) \\ &= 48 + 4(z_2\bar{z}_3 + z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1).\end{aligned}$$

Zatem
$$|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|^2 = (2|z_1 + z_2 + z_3|)^2$$
Skąd,
$$|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|.$$

Ćwiczenie 11. Oblicz i przedstaw w postaci kanonicznej
$$\sum_{k=1}^{100}(1+i)^k, \qquad \sum_{k=0}^{1000}\frac{1}{(k+i)(k-1+i)}.$$

Rozwiązanie 12. Najpierw,
$$\sum_{k=1}^{100}(1+i)^k.$$
to szereg geometryczny liczb zespolonych o ilorazie $1+i$. Dla dowolnego szeregu geometrycznego
$$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} q^k.$$
o współczynnikach z ciała, to dla $q \neq 1$
$$qS_n - S_n = q^{n+1} - q^{k_0} \Rightarrow S_n = \frac{q^{n+1} - q^{k_0}}{q-1}.$$
Wówczas,
$$\sum_{k=1}^{100}(1+i)^k = \frac{(1+i)-(1+i)^{101}}{1-1-i} = \frac{(1+i)}{-i}(1-(1+i)^{100}).$$
Widać, że $(1+i)^2 = 2i$. Wówczas,
$$\sum_{k=1}^{100}(1+i)^k = \frac{(1+i)}{-i}(1-(2i)^{50}) = \frac{(1+i)}{-i}(1-2^{50}i^2) = (i-1)(1+2^{50}).$$

Mamy, że
$$\sum_{k=0}^{1000}\frac{1}{(k+i)(k-1+i)} = \sum_{k=0}^{1000}\left(\frac{1}{k-1+i} - \frac{1}{k+i}\right) = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{1000+i}.$$