Anihilator i iloczyn tensorowy

Javier de Lucas

W następujących zadaniach ogólnie zakładamy, że wszystkie podprzestrzenie należą do przestrzeni wektorowej skończonego wymiaru.

Ćwiczenie 1. Dane przestrzeń wektorowa $\mathbb{C}^5$ i podprzestrzeń wektorowa

$$Y = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

oblicz Y° i $\dim Y^\circ$. Sprawdź, że $\dim Y^\circ = \dim \mathbb{C}^5 - \dim Y$.

Rozwiązanie: Z definicji wiemy, że

$$Y^\circ = \{\omega \in \mathbb{C}^5 \mid \omega(e) = 0, \forall e \in Y\}.$$

Jeżeli zdefiniujemy

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

widać, że te wektory generują Y i są liniowo niezależne. Zatem, $\dim Y = 3$ i

$$Y^\circ = \{\omega \in \mathbb{C}^5 \mid \omega(\bar{e}_1) = \omega(\bar{e}_2) = \omega(\bar{e}_3) = 0\}.$$

Jeżeli $e_1, \ldots, e_5$ to baza kanoniczna w $\mathbb{C}^5$ i $\theta^1, \ldots, \theta^5$ jej baza sprzężona, to możemy napisać

$$\omega = \lambda_1\theta^1 + \ldots + \lambda_5\theta^5$$

dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{C}$. Wtedy, warunki $\omega(\bar{e}_1) = \omega(\bar{e}_2) = \omega(\bar{e}_3) = 0$ można zapisać następująco

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & - & i\lambda_4 & + & \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & i\lambda_4 & + & \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 & - & i\lambda_2 & + & 2\lambda_4 & + & \lambda_5 = 0. \end{array}$$

Rozwiązując macierzowo mamy, że

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2+i & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zatem
$$\lambda_4 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = -\lambda_5, \qquad \lambda_5 \in \mathbb{C}, \qquad \lambda_3 \in \mathbb{C}.$$

Z tego wynika, że
$$Y^\circ = \{\lambda_5\theta^1 + \lambda_3\theta^3 - \lambda_5\theta^5, \lambda_3, \lambda_5 \in \mathbb{C}\}.$$

Widać, że
$$Y^\circ = \langle \theta^1 - \theta^5, \theta^3 \rangle.$$

Skoro generujące formy są liniowo niezależne, to $\dim Y^\circ = 2$. Widać, że $\dim Y^\circ = \dim \mathbb{C}^5 - \dim Y$. $\square$

Ćwiczenie 2. Niech Y_1, Y_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V. Udowodnij, że: a) $(Y_1 + Y_2)^\circ = Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$, b) $Y_1^{\circ\circ} = Y_1$, c) Jeżeli $Y_1 \subset Y_2$, to $Y_2^\circ \subset Y_1^\circ$, d) $(Y_1 \cap Y_2)^\circ \supset Y_1^\circ + Y_2^\circ$ gdy $\dim V = \infty$ i $(Y_1 \cap Y_2)^\circ = Y_1^\circ + Y_2^\circ$ gdy $\dim V < \infty$.

Rozwiązanie: Najpierw, udowodnimy, że $(Y_1 + Y_2)^\circ = Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$. Jeżeli
$$\omega \in (Y_1 + Y_2)^\circ \to \omega \in Y_1^\circ \wedge \omega \in Y_2^\circ \to \omega \in Y_1^\circ \cap Y_2^\circ.$$

Zatem, $Y_1 + Y_2 \subset Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$.

Odwrotnie, zakładamy, że $\omega \in Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$. Z definicji przestrzeni $Y_1 + Y_2$, każdy element $e \in Y_1 + Y_2$ można zapisać, jako sumę $e = e_1 + e_2$, gdzie $e_1 \in Y_1$ i $e_2 \in Y_2$. Więc,
$$\omega(e) = \omega(e_1) + \omega(e_2).$$

Skoro $\omega \in Y_1^\circ$ i $\omega \in Y_2^\circ$, to
$$\omega(e) = \omega(e_1) + \omega(e_2) = 0 + 0 = 0.$$

Zatem, $\omega(e) = 0$ dla dowolnego $e \in Y_1 + Y_2$ i $\omega \in (Y_1 + Y_2)^\circ$. Z tego wynika, że $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ \subset (Y_1 + Y_2)^\circ$.

Ponieważ $(Y_1 + Y_2)^\circ \subset Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$ i $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ \subset (Y_1 + Y_2)^\circ$, to $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ = (Y_1 + Y_2)^\circ$.

Teraz udowodnimy, że $Y^{\circ\circ} = Y$. Aby to zrobić, przypominamy, że każdy element $e \in V$ można zrozumieć jako odwzorowanie $\phi_e : V^* \to \mathbb{R}$ postaci
$$\phi_e(\omega) = \omega(e).$$

Widać, że ϕ_e jest odwzorowaniem liniowym na przestrzeni sprzężonej V^*:

$$\phi_e(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)(e) = \lambda_1\omega_1(e) + \lambda_2\omega_2(e) = \lambda_1\phi_e(\omega_1) + \lambda_2\phi_e(\omega_2).$$

Teraz udowodnimy, że $Y \subset Y^{\circ\circ}$. Zauważmy, że lewa strona to $Y \subset V$ i prawa strona to $Y^{\circ\circ} \subset V^{**}$. Takie wyrażenie ma sens ponieważ, każdy element V, w szczególności każdy element Y, można zrozumieć jako element w V^{**}. Dany element $e \in Y$, jako element $\phi_e \in V^{**}$ mamy, że

$$\omega(e) = 0, \qquad \forall\omega \in Y^\circ.$$

Zatem

$$\phi_e(\omega) = 0, \qquad \forall\omega \in Y^\circ$$

i $\phi_e \in Y^{\circ\circ}$. Więc, $Y \subset Y^{\circ\circ}$. Aby udowodnić, że $Y^{\circ\circ} = Y$ trzeba korzystać ze skończonego wymiaru Y (ogólnie to nie prawda). Mamy, że

$$\dim Y^\circ = \dim V - \dim Y \Rightarrow \dim Y^{\circ\circ} = \dim V^* - \dim Y^\circ = \dim V^* - \dim V + \dim Y.$$

Dla $\dim V < \infty$, to $\dim Y^{\circ\circ} = \dim Y$ i $Y^{\circ\circ} \subset Y$. Zatem $Y^{\circ\circ} = Y$.

Teraz udowodnimy, że jeżeli $Y_1 \subset Y_2$ to $Y_2^\circ \subset Y_1^\circ$. Widać, że jeżeli $\omega \in Y_2^\circ$, to

$$\omega(e) = 0, \forall e \in Y_2.$$

Skoro $Y_1 \subset Y_2$, to

$$\omega(e) = 0, \forall e \in Y_1 \Rightarrow \omega \in Y_1^\circ.$$

Warto znaleźć jakiś przykład, gdzie $\omega \in Y_1^\circ$ i $\omega \notin Y_2^\circ$.

Teraz udowodnimy, że $Y_1^\circ + Y_2^\circ \subset (Y_1 \cap Y_2)^\circ$. Jeżeli $\omega \in Y_1^\circ + Y_2^\circ$, to

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dla pewnych $\omega_1 \in Y_1^\circ$ i $\omega_2 \in Y_2^\circ$. Zatem, dla dowolnego $e \in Y_1 \cap Y_2$ mamy, że

$$\omega(e) = \omega_1(e) + \omega_2(e) = 0 + 0 = 0.$$

Więc, $\omega \in (Y_1 \cap Y_2)^\circ$. Zatem $Y_1^\circ + Y_2^\circ \subset (Y_1 \cap Y_2)^\circ$. Jeżeli zakładamy, że $\dim V < \infty$, można udowodnić, że $Y_1^\circ + Y_2^\circ = (Y_1 \cap Y_2)^\circ$. Właśnie,

$$\dim(Y_1 \cap Y_2)^\circ = \dim V - \dim Y_1 \cap Y_2 = \dim V - (\dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 + Y_2)$$
$$= \dim V - \dim Y_1 + \dim V - \dim Y_2 - \dim V + \dim Y_1 + Y_2 = \dim Y_1^\circ + \dim Y_2^\circ - \dim(Y_1 + Y_2)^\circ.$$

Z tego wynika, że

$$\dim(Y_1 \cap Y_2)^\circ = \dim Y_1^\circ + \dim Y_2^\circ - \dim(Y_1^\circ \cap Y_2^\circ) = \dim Y_1^\circ + Y_2^\circ.$$

Skoro $\dim(Y_1^\circ + Y_2^\circ) = \dim(Y_1 \cap Y_2)^\circ$ i $Y_1^\circ + Y_2^\circ \subset (Y_1 \cap Y_2)^\circ$ to $Y_1^\circ + Y_2^\circ = (Y_1 \cap Y_2)^\circ$. $\square$

Ćwiczenie 3. Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^5$ postaci

$$W_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 0\},$$
$$W_2 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_2 + 3x_5 = 0\}.$$

Oblicz W_1°, W_2°, $W_2^\circ + W_1^\circ$, $W_1 \cap W_2$ i $(W_1 \cap W_2)^\circ$ i $(W_1 + W_2)^\circ$.

Rozwiązanie:
Wiemy, że

$$W_1^\circ = \{\omega \in (\mathbb{R}^5)^* \mid \omega(e) = 0, \forall e \in W_1\}.$$

Z definicji

$$W_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 0\}.$$

Widać, że $\omega_1([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T) = x_1 + x_2 + x_3$ i $\omega_2 = ([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T) = x_1 + 2x_2 + 3x_5$ są formami liniowymi na $\mathbb{R}^5$. Więc,

$$W_1 = \{v = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbb{R}^5 : \omega_1(e) = \omega_2(e) = 0\}.$$

Widać, że

$$W_1^\circ = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle.$$

Podobnie

$$W_2^\circ = \langle \omega_3, \omega_4 \rangle,$$

gdzie

$$\omega_3 = ([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T) = x_1 + x_2, \qquad \omega_4([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T) = x_1 + x_2 + 3x_5.$$

Zatem

$$W_1^\circ + W_2^\circ = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \rangle = (W_1 \cap W_2)^\circ.$$

Wiemy, że

$$W_1 \cap W_2 = (W_1^\circ + W_2^\circ)^\circ.$$

Innymi słowa, $W_1 \cap W_2$ to zbiór elementów takich, że formy podprzestrzeni $W_1^\circ + W_2^\circ$ się zerują na nich. Więc,

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & & & & + & 3x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0. \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & 3x_5 & = & 0. \end{array}$$

Rozwiązując mamy $x_5 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ i $x_4 \in \mathbb{R}$. Zatem,

$$W_1 \cap W_2 = \langle [0, 0, 0, 1, 0]^T \rangle.$$

Natomiast,

$$(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ = \{0\}$$

ponieważ $\dim W_1^\circ + W_2^\circ = 4 = \dim W_1^\circ + \dim W_2^\circ$ i $\dim W_1^\circ \cap W_2^\circ = 0$.

□

Ćwiczenie 4. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$. Udowodnij, że $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.