ALGEBRA I R
4 lutego 2015
Semestr zimowy
Egzamin probny II

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Dla $\theta \in \mathbb{R}$ określmy następujące podzbiory:

$$C_\theta := \{z : e^{-i\theta}(z-1)(\bar{z}+1) \in \mathbb{R}\}, \qquad C_\theta^+ := \{z : e^{-i\theta}(z-1)(\bar{z}+1) \in \mathbb{R}_+\};$$

niech ponadto $\rho(z) := (z + z^{-1})/2$. Dowieść, że jeśli $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, to $C_\theta = C(i\text{ctg}\theta; 1/|\sin\theta|)$ jest okręgiem przechodzącym przez punkty $-1, +1, i\text{ctg}\theta/2, -i\text{tg}\theta/2$, natomiast C_θ^+ jest częścią C_θ zawartą w półpłaszczyźnie $\sin\theta \cdot \operatorname{Im} z \geq 0$, przy czym zachodzi wzór $\rho(C_\theta) = C_{2\theta}^+$.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_3[x]$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia nie wiekszych niż 3. Zdefinuuj odwzorowanie $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ postaci

$$F(P) := \frac{d^3P}{dx^3} + (P - P(0))/x + 2P.$$

Podaj macierz tego morfizmu w bazach kanonicznych, wymiary i bazy jego obrazu i jądra. Oblicz macierz $[F]_{\bar{\mathcal{B}}}^{\bar{\mathcal{B}}}$ w bazie $\bar{\mathcal{B}} = \{1, 1+x, x^2, x^3\}$. Oblicz $\ker F^T$ i $(\operatorname{Im} F)^\circ$.

Zadanie 3. Dana jest przestrzeń wektorowa $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych. Ustal ogólną postać macierzy w bazach kanonicznych odwzorowania liniowego $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ taki, że $(F^T)^2 = 0$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że wzór $\sigma(k) := (|4k - 53| + 1)/2$ określa permutację zbioru $\{1, \ldots, 25\}$. Wyznaczyć rozkład σ na cykl, znak σ, zbiór punktów stałych $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma$, zbiór punktów stałych σ^4 i wzór opisujący σ^{-1}.