Odwzorowania liniowe, jądro, obraz

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Sprawdź, czy następujące odwzorowania są liniowe. Jeżeli tak, określ ich macierze w pewnej bazie, wymiar i bazę obrazu i jądra.

$$a)\ F:\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto(2x-y,x+1,y-6)\in\mathbb{R}^3,$$

$$b)\ F:\mathbb{R}^5\ni(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\mapsto(x_1+x_2+x_3,x_2+x_3+x_4,x_3+x_4+x_5)\in\mathbb{R}^3,$$

$$c)\ F:\mathbb{R}_3[t]\ni\sum_{\alpha=0}^{3}c_\alpha t^\alpha\mapsto 3+c_0+c_3t+(c_2-c_3)t^2+c_1t^3\in\mathbb{R}_3[t],$$

$$d)\ F:\mathbb{R}_3[t]\ni P(t)\mapsto\frac{dP}{dt}(t_0)+t\frac{d^2P}{d^2t}\in\mathbb{R}_3[t].$$

Ćwiczenie 2. Niech $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ i $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, gdzie $f(x,y)=(2x-y,y-2x,x)$, $g(x,y,z)=(x+y+z,y-z)$. Sprawdź, czy są odwzorowania liniowe. Znajdź macierz tych odwzorowań w bazach kanonicznych. Znajdź $\ker f$, $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}g$ oraz ich wymiary. Oblicz $f(2,4)$ i $g(1,2,3)$. Określ $f\circ g$, $g\circ f$ oraz macierze tych odwzorowań.

Ćwiczenie 3. Dane jest odwzorowanie

$$\delta_t: f\in C^\infty(\mathbb{R})\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d^nf}{dt^n}\in C^\infty(\mathbb{R}),\qquad a_n\in\mathbb{R}.$$

Czy takie odwzorowanie jest odwzorowaniem liniowym?

Ćwiczenie 4. Skonstruuj endomorfizm $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ taki, że $\ker f=\langle u_1,u_2\rangle$ i $\mathrm{im}\,f=\langle v_1,v_2\rangle$, gdzie $u_1=(1,1,-1,0)$, $u_2=(1,1,0,1)$, $v_1=(1,1,1,1)$ i $v_2=(1,0,1,0)$.

Ćwiczenie 5. Operator $F\in\mathrm{End}\,\mathbb{R}_n[\cdot]$ dany jest wzorem $(F\omega)(t):=(t+1)\,\omega'(t)$. Znaleźć macierz F w bazie $v=(1,t,t^2,\ldots,t^n)$; znaleźć $\ker F$, $\mathrm{Im}F$ i $\mathrm{rk}F$ oraz zbadać, czy operator F jest odwracalny.