Przestrzenie wektorowe, liniowa niezależność

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. W literaturze można znaleźć pojęcia przestrzeni liniowej i przestrzeni wektorowej. Obie rzeczy mają taką samą znaczenie. Następująco, korzystamy z dwóch terminów jednocześnie.

W zbiorze $V := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ określmy naturalne dodawanie $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, a mnożenie przez liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ zdefiniujmy jednym z następujących wzorów:

$$(a)\ \lambda \cdot (z_1, z_2) := (\lambda_1 z_1, z_2); \qquad (b)\ \lambda \cdot (z_1, z_2) := (\lambda z_1, 0);$$
$$(c)\ \lambda \cdot (z_1, z_2) := ((\operatorname{Re}\lambda) z_1, (\operatorname{Re}\lambda) z_2).$$

Dla każdego z tych przypadków sprawdzić, które z aksjomatów przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$ są spełnione, a które nie są.

Rozwiązanie: Dodawanie w zbiorze $V := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ jest standardowym dodawaniem przestrzeni wektorowej zespolonej $\mathbb{C}^2$. Zatem, mamy dobrze określone dodawanie $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tworząc grupę abelową $(V, +)$ z elementem neutralnym $(0, 0)$. Oczwiście, element przeciwny elementu (x, y) to $(-x, -y)$.

Aby udowdonić, że $(V, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, musimy sprawdzić, czy mnożenie spełnia wszsytkie właściwosci przestrzeni liniowej. Zrobimy to dla każdego mnożenia.

a) $\lambda \cdot (z_1, z_2) := (\lambda z_1, z_2)$

- Rozdzielność mnożenia ze względu na dodawanie:

  Ta własność się spełnia, gdy

  $$\lambda \cdot [(z_1, z_2) + (\bar{z}_1, \bar{z}_2)] = \lambda \cdot (z_1, z_2) + \lambda \cdot (\bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (z_1, z_2), (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

  Widać, że pierwsze mnożenie spełnia tą własność ponieważ

  $$\begin{aligned}\lambda \cdot [(z_1, z_2) + (\bar{z}_1, \bar{z}_2)] &= \lambda \cdot (z_1 + \bar{z}_1, z_2 + \bar{z}_2) = (\lambda(z_1 + \bar{z}_1), z_2 + \bar{z}_2) \\ &= (\lambda z_1, z_2) + (\lambda \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \lambda \cdot (z_1, z_2) + \lambda \cdot (\bar{z}_1, \bar{z}_2).\end{aligned}$$

  dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$ i $(z_1, z_2), (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

- Rozdzielność dodawania ze względu na mnożenia:

  Ta własność się spełnia, gdy

  $$(\lambda + \bar{\lambda}) \cdot (z_1, z_2) = \lambda \cdot (z_1, z_2) + \bar{\lambda} \cdot (z_1, z_2), \quad \forall \lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

W naszym przepadku:

$$(\lambda+\bar{\lambda})\cdot(z_1,z_2)=((\lambda+\bar{\lambda})z_1,z_2)=(\lambda z_1+\bar{\lambda}z_1,z_2)$$
$$\neq(\lambda z_1,z_2)+(\bar{\lambda}z_1,z_2)=\lambda\cdot(z_1,z_2)+\bar{\lambda}\cdot(z_1,z_2),\qquad \forall z_2\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

- Element neutralny mnożenia:

  Element neutralny mnożenia to taki element $a\in\mathbb{C}$ taki, że

  $$a\cdot(z_1,z_2)=(z_1,z_2),\qquad \forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

  Widać, że taki element jest właśnie liczba $1\in\mathbb{C}$. Więc, to pierwsze mnożenie ma element neutralny. Często, napiszę się 1 dla elementu neutralnego mnożenia. W tym przypadku, elementu neutralnego mnożenia to właśnie liczba 1.

- Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów:

  Mówi się, że mnożenie spełnia taką własność gdy:

  $$(\lambda_1\lambda_2)\cdot(z_1,z_2)=\lambda_1\cdot[\lambda_2\cdot(z_1,z_2)),\forall\lambda_1\lambda_2\in\mathbb{C},\qquad \forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

  W naszym przypadku:

  $$(\lambda_1\lambda_2)\cdot(z_1,z_2)=(\lambda_1\lambda_2z_1,z_2)=\lambda_1\cdot(\lambda_2z_1,z_2)=\lambda_1\cdot[\lambda_2\cdot(z_1,z_2)]$$

  dla wszystkich $\lambda_1\lambda_2\in\mathbb{C}$ i dla każdego $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Więc, ta własność spełnia się.

Podsumując, $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},+\cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

b) $\lambda\cdot(z_1,z_2):=(\lambda z_1,0)$

- Rozdzielność mnożenia ze względu na dodawanie:

  Widać, że

  $$\lambda\cdot[(z_1,z_2)+(\bar{z}_1,\bar{z}_2)]:=\lambda\cdot(z_1+\bar{z}_1,z_2+\bar{z}_2)=(\lambda(z_1+\bar{z}_1),0)$$
  $$=(\lambda z_1,0)+(\lambda\bar{z}_1,0)=\lambda\cdot(z_1,z_2)+\lambda\cdot(\bar{z}_1,\bar{z}_2),$$

  dla dowolnych $(z_1,z_2),(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ i $\lambda\in\mathbb{C}$. Wówczas, nasze mnożenia spełnia rozdzielność ze względu na dodawanie.

- Rozdzielność dodawania ze względu na mnożenia:

Mamy, że

$$(\lambda+\bar{\lambda})\cdot(z_1,z_2) := ((\lambda+\bar{\lambda})z_1,0) = (\lambda z_1+\bar{\lambda}z_1,0)$$
$$= (\lambda z_1,0)+(\bar{\lambda}z_1,0) = \lambda\cdot(z_1,z_2)+\bar{\lambda}\cdot(z_1,z_2), \qquad \forall\lambda,\bar{\lambda}\in\mathbb{C},\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

Zatem, nasze mnożenie spełnia rozdzielność względem mnożenia.

- Element neutralny mnożenia:

  Element neutralny mno zenia to liczba $a\in\mathbb{C}$, który spełnia, że

  $$a\cdot(z_1,z_2) = (z_1,z_2), \qquad \forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

  Natomiast, mamy, że dla każdej liczby $a\in\mathbb{C}$ wynika, że

  $$a\cdot(z_1,z_2) = (az_1,0)\neq(z_1,z_2), \qquad \forall z_2\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

  Więc, te drugie mnożenia nie ma elementu neutralnego.

- Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów:

  Mówi się, że mnożenie spełnia taką własność gdy:

  $$(\lambda_1\lambda_2)\cdot(z_1,z_2) = \lambda_1\cdot[\lambda_2\cdot(z_1,z_2)), \qquad \forall\lambda_1\lambda_2\in\mathbb{C},\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

  W naszym przypadku:

  $$(\lambda_1\lambda_2)\cdot(z_1,z_2) := (\lambda_1\lambda_2 z_1,0) = \lambda_1\cdot(\lambda_2 z_1,0) = \lambda_1\cdot[\lambda_2\cdot(z_1,z_2)),$$
  $$\forall\lambda_1\lambda_2\in\mathbb{C},\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

  Zatem, ta własność spełnia się.

Podsumując, $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},+,\cdot)$ nie jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$.
c) $\lambda\cdot(z_1,z_2) := ((\operatorname{Re}\lambda)z_1,(\operatorname{Re}\lambda),z_2)$

- Rozdzielność mnożenia ze względu na dodawanie:

  $$\lambda\cdot[(z_1,z_2)+(\bar{z}_1,\bar{z}_2)] = \lambda\cdot(z_1+\bar{z}_1,z_2+\bar{z}_2) = ((\operatorname{Re}\lambda)(z_1+\bar{z}_1),(\operatorname{Re}\lambda)(z_2+\bar{z}_2))$$
  $$= ((\operatorname{Re}\lambda)z_1,(\operatorname{Re}\lambda)z_2)+((\operatorname{Re}\lambda)\bar{z}_1,(\operatorname{Re}\lambda)\bar{z}_2) = \lambda\cdot(z_1,z_2)+\lambda\cdot(\bar{z}_1,\bar{z}_2)$$

  dla dowolnych $\lambda\in\mathbb{C}$ i $(z_1,z_2),(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Więc, to mnożenie spełnia tą własność.

- Rozdzielność dodawania ze względu na mnożenia:

$$(\lambda+\bar{\lambda})\cdot(z_1,z_2) := (\mathrm{Re}(\lambda+\bar{\lambda})z_1, z_2) = (\mathrm{Re}(\lambda)z_1+\mathrm{Re}(\bar{\lambda})z_1, \mathrm{Re}(\lambda)z_2+\mathrm{Re}(\bar{\lambda})z_2)$$
$$= (\mathrm{Re}(\lambda)z_1, \mathrm{Re}(\lambda)z_2)+(\mathrm{Re}(\bar{\lambda})z_1, \mathrm{Re}(\bar{\lambda})z_2) = \lambda\cdot(z_1,z_2)+\bar{\lambda}\cdot(z_1,z_2).$$

  Więc, mnożenie spełnia tej własności.

- Element neutralny mnożenia:

  Element neutralny mno zenia, to element $1 \in \mathbb{C}$ spełniając,

$$1\cdot(z_1,z_2) = (z_1,z_2), \qquad \forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}. \tag{1.1}$$

- Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów: Mamy, że dla uogólnych liczb zespolonech λ_1, λ_2 mamy, że

$$(\lambda_1\lambda_2)\cdot(z_1,z_2) := (\mathrm{Re}(\lambda_1\lambda_2)z_1, z_2) \neq (\mathrm{Re}(\lambda_1)\mathrm{Re}(\lambda_2)z_1, z_2)$$
$$= \lambda_1\cdot(\mathrm{Re}(\lambda_2)z_1, z_2) = \lambda_1\cdot[\lambda_2\cdot(z_1,z_2)).$$

Natomiast, widać, że ta własność spełnia się dla skalarów zespolonych. Natomiast, ta własność się spełnia dla libcz rzeczywistych.

Podsumując, $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},+,\cdot)$ nie jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$. Natomiast, $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},+,\cdot)$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

$\square$

Ćwiczenie 2. Niech $V := \{x\in\mathbb{R} : x>0 \ i \ \exists n\in\mathbb{N} : x^n\in\mathbb{Q}\}$. Sprawdzić, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, jeżeli zdefiniujemy $\oplus : (v,w)\in V\times V \mapsto vw\in V$ i mnożenie $\cdot : (\lambda, v)\in\mathbb{K}\times V\mapsto v^\lambda\in V$, gdzie vw i v^λ to zwykłe mnożenie i potęgowanie liczb rzeczywistych. Wykazać, że liczby pierwsze $2,3,5,7,11,\cdots$ są liniowo niezależne i generują całą V.

Rozwiązanie: Aby sprawdzić, że $(V,\oplus,\cdot)$ to przestrzeń liniowa musimy sprawdzić po kolej wszystkie właściwości przestrzeni wektorowej.

Najpierw, sprawdzamy czy $(V,\oplus)$ to grupa abelowa.

- Widać, że $\oplus : V\times V\to V$ jest dobrze określone działanie:

$$\forall v,w\in V, \exists n_1,n_2\in\mathbb{N}, v^{n_1}\in\mathbb{Q}\,\mathrm{i}\, w^{n_2}\in\mathbb{Q} \Rightarrow (v\oplus w)^{n_1n_2} = (vw)^{n_1n_2} = [v^{n_1}]^{n_2}[w^{n_2}]^{n_1}.$$

  Skoro $v^{n_1}, w^{n_2}\in\mathbb{Q}$, to $[v^{n_1}]^{n_2}, [w^{n_2}]^{n_1}\in\mathbb{Q}$ i zatem $v\oplus w = [v^{n_1}]^{n_2}[w^{n_2}]^{n_1}\in\mathbb{Q}$. Wówczas, $v\oplus w\in V$.

- Dodawanie jest łączne:

$$\forall v, w, z \in V, \qquad (v \oplus w) \oplus z = vw \oplus z = vwz = v \oplus (wz) = v \oplus (w \oplus z).$$

- Element neutralny dodawania

$$\forall w, \in V, \qquad (1 \oplus w) = w.$$

  Normalnie, element neutralny dodawanie oznacza się przez 0. Natomiast, w tym przypadku, element neutralny dodawanie to liczba $1 \in \mathbb{Q}$.

- Element przeciwny.

  Dla każdego $v \in V$, istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $v^n \in \mathbb{Q}$. Skoro $v \neq 0$, to $\mathbb{Q} \ni v^{-n} = (v^{-1})^n$ i $v^{-1} \in V$. Korzystając z tego:

$$\forall w, \in V, \qquad (w^{-1} \oplus w) = w^{-1}w = 1.$$

- Działanie abelowe

$$\forall v, w \in V, \qquad v \oplus w = vw = wv = w \oplus v.$$

Sprawdzamy własciwości mnożenia:

- Najpierw, sprawdzamy czy mnożenie jest dobrze zdefiniowane.

  Jeżeli $v \in V$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $v^n \in \mathbb{Q}$. Dany $\lambda \in \mathbb{Q}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ taki, że $m\lambda \in \mathbb{Z}$. Skoro $v^n \in \mathbb{Q}$ i $\lambda m \in \mathbb{Z}$ to $(v^\lambda)^{nm} = (v^n)^{\lambda m} \in \mathbb{Q}$ i $\lambda \cdot v = v^\lambda \in V$.

- Rozdzielność mnożenia ze względu na dodawanie:

  Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{Q}$ i $v_1, v_2 \in V$ mamy, że

$$\lambda \cdot (v_1 \oplus v_2) = \lambda \cdot (v_1 v_2) = (v_1 v_2)^\lambda = v_1^\lambda v_2^\lambda = v_1^\lambda \oplus v_2^\lambda = \lambda \cdot v_1 \oplus \lambda \cdot v_2.$$

- Rozdzielność dodawania ze względu na mnożenia:

$$(\lambda + \bar{\lambda}) \cdot v = v^{\lambda + \bar{\lambda}} = v^\lambda v^{\bar{\lambda}} = \lambda \cdot v \oplus \bar{\lambda} \cdot v.$$

- Element neutralny mnożenia:

$$\forall w \in V, \qquad 1 \cdot w = w. \tag{2.1}$$

Zatem 1 to element neutralny mnożenia. Warto zauważyć, że w tym przypadku element neutralny mnożenia i dodawania są "sobie równe". Natomiast, też trzeba pamiętać, że element neutralny mnożenie to skalar 1. Natomiast, element neutralny dodawania to wektor 1. Okazuże się, że obie liczby są równe. Natomiast, pierwszy element trzeba zrozumieć jako skalar i drugi jako wektor. W tym sensie, nie są sobie równe, ponieważ są elementami ró znych zbiorów przestrzeni wektorowej.

- Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów:

$$(\lambda_1\lambda_2)\cdot v = (v^{\lambda_1\lambda_2}) = (v^{\lambda_2})^{\lambda_1} = \lambda_1 \cdot [\lambda_2 \cdot v], \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}, \forall v \in V.$$

Sprawdzamy teraz, że elementy $2, 3, 5, 7, \ldots$ generują całą przestrzeń V. Każdy element $v \in V$ spełnia, że $v^n \in \mathbb{Q}$. Z tego powodu i skoro $v > 0$, możemy napisać $v^n = p/q$ dla $p \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{N}$ względnie pierwsze. Zatem,

$$qv^n = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r},$$

dla pewnych libcz pierwszych i niezerowych liczb naturalnych $n_1, \ldots, n_r$. Dodatkowo, $q = p_1^{n'_1} \cdots p_k^{n'_k}$ dla liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_k$ i niezerowych lyczb naturalnych $n'_1, \ldots, n'_k$. Jezeli $p_1, p_2, \ldots, p_s$ to są wszystkie liczby pierwszy poprzednich rozkładów, to możemy napisać rozkłady liczb qv^n i q jako iloczyń potęg tych liczb pierwszych

$$qv^n = p_1^{\bar{n}_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\bar{n}_s}, \qquad q = p_1^{\bar{n}'_1} \cdots p_s^{\bar{n}'_s}.$$

, to

$$v^n = p_1^{\bar{n}_1/\bar{n}'_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\bar{n}_2/\bar{n}'_s} = \bigoplus_{i=1}^{s} \frac{\bar{n}_i}{\bar{n}'_i} \cdot p_i, \qquad n'_1, \ldots, n'_s \in \mathbb{Z}$$

i

$$v = \bigoplus_{i=1}^{s} \frac{\bar{n}_i}{\bar{n}'_i \cdot n} \cdot p_i.$$

Zatem, liczby pierwsze generują V.

Teraz udowodnimy, że liczby pierwsze są liniowo niezależny. Przypominamy, że elementy v_1,v_2,..., przestrzeni liniowej V nazywają się liniowo zależnym, gdy istnieje **skończona** liczba różnych wektorów v_1,v_2,...,v_n tego zbioru oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, nie wszystkie zerowe (jako element neutralne dodawania ciała), takie, że

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i = 1 \qquad \text{(1element neutralny dodawania przestrzeni wektorowej!!).}$$

Teraz udowodnijmy, że elementy $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$ są liniowo niezależne

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot p_i = 1 \Longleftrightarrow p_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\lambda_n} = 1.$$

Liczbe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ możba mnożyć przez liczbę naturalną m, taką, że $\lambda_i m \in \mathbb{Z}$. Napisujemy potęgi $p_i^{\lambda_i}$ dla $\lambda_i > 0$ po prawej stronie i resztą po lewej. Mamy, że

$$p_{i_1}^{\lambda_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}^{\lambda_{i_n}} = p_{i_1}^{\lambda_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}^{\lambda_{i_n}}.$$

Skoro każda liczba naturalna, czyli $p_{i_1}^{\lambda_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}^{\lambda_{i_n}}$ ma jedyny rozkład jako iloczyn potęgów liczb pierwszy, mamy, że prawa i lewa strona są sobie równe i $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

$\square$

Ćwiczenie 3. Niech $\mathbb{R}_3[\mathfrak{X}]$ będzie przestrzenią wektorową (nad $\mathbb{R}$) wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia nie większego od 3. Zbadać liniową zależność wektorów $P_1(\mathfrak{X}) := 1 + \mathfrak{X} + 2\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$, $P_2(\mathfrak{X}) := 2 + \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X}^3$, $P_3(\mathfrak{X}) := 7 + 5\mathfrak{X} + 4\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$.

Rozwiązanie: Wielomiany $\{P_1(\mathfrak{X}), P_2(\mathfrak{X}), P_3(\mathfrak{X})\}$ są liniowo niezależny, gdy

$$\lambda_1 P_1(\mathfrak{X}) + \lambda_2 P_2(\mathfrak{X}) + \lambda_3 P_3(\mathfrak{X}) = 0 (to wektor zero, czyli wielomian zero) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Korzystając z faktu, że dwa wielomiany są takie same gdy wszystkie współczynniki są takie same, to

$$\begin{cases} \lambda_1 + & 2\lambda_2 + & 7\lambda_3 = & 0, \\ \lambda_1 + & \lambda_2 + & 5\lambda_3 = & 0, \\ 2\lambda_1 + & \lambda_2 + & 4\lambda_3 = & 0, \\ \lambda_1 - & \lambda_2 + & \lambda_3 = & 0, \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3) \begin{cases} 3\lambda_2 + & 6\lambda_3 = & 0, \\ 2\lambda_2 + & 4\lambda_3 = & 0, \\ 3\lambda_2 + & 2\lambda_3 = & 0, \end{cases}$$

Zatem

$$\Rightarrow (\lambda_2 = -2\lambda_3) \begin{cases} -4\lambda_3 + & 4\lambda_3 = & 0, \\ -6\lambda_3 + & 2\lambda_3 = & 0, \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Aby uprościć rozwiązanie tych układów, korzystamy z notacji macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_4\to R_3]{\substack{R_1-R_4\to R_1\\ R_2-R_4\to R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1-R_3\to R_1\\ 3R_2-2R_3\to R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

□

Ćwiczenie 4. Zbadać liniową zależność wektorów

- $(1,-1,0,2,4)$, $(7,-5,0,2,2)$, $(1,0,1,0,1)$, $(8,-4,2,0,0)$ w $\mathbb{Q}^5$ (nad $\mathbb{Q}$).
- $(1,\sqrt{2},0,2,4)$, $(1,0,\sqrt{3},0,\sqrt{5})$, $(1+\sqrt{2},0,1,0,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2},\sqrt{2},2,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},4,1,0,4\sqrt{2})$ w $\mathbb{R}^5$ (nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{Q}$).
- $(i,-i,0,2,4)$, $(2,0,0,2-2i,1-4i)$, $(1,1,0,2,1)$ w $\mathbb{C}^5$ (nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$).

Rozwiązanie: Wektory $e_1 := (i,-i,0,2,4)$, $e_2 := (2,0,0,2-2i,1-4i)$, $e_3 := (1,1,0,2,1)$ są liniowo niezależny nad $\mathbb{C}$ gdy

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{4.1}$$

Macierzowo to oznacza:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-2i & 2 & 0 \\ 4 & 1-4i & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1+R_2\to R_1\\ R_4-R_5\to R_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1-4i & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{4R_1-iR_5\to R_1\\ 3R_2-2R_3\to R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4-i & 4-i & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1-4i & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Zatem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1-4i & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Zatem $\lambda_2 = -\lambda_3$ i $\lambda_1 = [-\lambda_3 - (1-4i)\lambda_2]/4$, czyli $\lambda_1 = -i\lambda_3$. To oznacza, że wektory e_1, e_2, e_3 są liniowo zależne nad $\mathbb{C}$. Natomiast, widać, że są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$ ponieważ nie ma rzeczywistych liczb różnych od zera spełniają warunek (4.1). □

Ćwiczenie 5. Zbadać liniową zależność w przestrzeni $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, czyli przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, układu funkcji:

- $\cos\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\cos^3\varphi$,
- $\sin\varphi$, $\sin 3\varphi$, $\sin^3\varphi$,
- $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$.

Rozwiązanie: Widać, że cos φ, cos 3φ i $\cos^3\varphi$ są liniowo zależne. Właśnie,

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos\ 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi \\ &= \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi = \cos^3\varphi - 3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Zatem,

$$4\cos^3\varphi - \cos 3\varphi - 3\cos\varphi = 0.$$

Skoro poprzednia równość spełnia się dla dowonego φ, to możemy postawić $\varphi = \pi/2 - \varphi'$ i otrzymać, że

$$4\cos^3(\pi/2-\varphi') - \cos(3\pi/2 - 3\varphi) - 3\cos(\pi/2-\varphi') = 0.$$

Zatem

$$4\sin^3\varphi' + \sin 3\varphi' - 3\sin\varphi' = 0 \qquad \forall\varphi' \in \mathbb{R}$$

i funkcje $\sin^3\varphi$, $\sin 3\varphi$ i $\sin\varphi$ są liniowo zależne.

Natomiast, jeżeli

$$\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2\sin\varphi + \lambda_3\cos^2\varphi + \lambda_4\sin^2\varphi = 0$$

to mamy, że

$$\varphi = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad \varphi = \pi/2 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

i

$$\varphi = \pi \Rightarrow -\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad \varphi = 3\pi/2 \Rightarrow -\lambda_2 + \lambda_4 = 0.$$

Z tego wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ i te funkcje są liniowo niezależne.

$\square$