Znaleźć ogólne rozwiązanie równania:

a) $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$

To równanie jednorodne. Więc, korzystamy z podstawienia $y = u(x)\cdot x$. Wtedy,

$$u'x + u = u + \cos^2 u \Rightarrow \quad u'x = \cos^2 u \Rightarrow$$

(1)
Rozwiązanie trywialne ($u = \frac{\pi}{2} + k\pi$) $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx} = \frac{\cos^2 u}{x} \Rightarrow \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{dx}{x}$. $\Leftarrow$ Zgubiliśmy rozwiązanie $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo podzieliśmy przez $\cos^2 u$...

To równanie o rozdzielonych zmiennych.

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \operatorname{tg} u = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow u = \operatorname{arc\,tg}(\ln|x| + C_1)$$

Trzeba pamiętać, że dane Δ, $\operatorname{arctg}\Delta$ ma wiele wartości, np. $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\pi, \ldots\ldots$
Aby uniknąć, że $\operatorname{arc\,tg}(\ln|x|+C_1)$ to nie funkcja i nie wprowadzić do błędu, napiszemy

$$u = \operatorname{arc\,tg}(\ln|x| + C_1) + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

to wartość między $[0,\pi)$

Można zauważyć, że $C \to \infty$, mamy też rozwiązanie

$$u = \operatorname{arc\,tg}(\ln|x| + \infty) + k\pi = (k+\tfrac{1}{2})\pi$$

To rozwiązanie jest (1).

Więc, mamy, że

$$y = [\operatorname{arc\,tg}(\ln|x| + C_1) + k\pi]\,x \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$$

i

$$y = \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\pi x. \qquad (C \to \pm\infty)$$

b) $y' = \frac{y}{x} \log\left(\frac{y}{x}\right)$ dla $\frac{y}{x} > 0$

Prawa strona tego równanie to funkcja jednorodna. Więc, korzystamy z podstawienia $y = u(x)x$. Wówczas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u = u \log u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u(\log u - 1)}{x} \quad (1)$$

To równanie o rozdzielonych zmiennych

zgubiliśmy rozwiązanie $u=e$.

$$\frac{du}{u(\log u - 1)} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{u(\log u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

Trzeba pamiętać, że $u>0$...

$$\Rightarrow \int \frac{d \log u}{\log u - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v-1} = \frac{dx}{x} \to \log|v-1| = \log|x| + C_1$$

$$\log|\log u - 1| = \log|x| + C_1 \Rightarrow \log u - 1 = \pm e^{\log|x| + C_1} = k\,x, \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\log u = 1 + kx \Rightarrow u = e^{1+kx}$$

← można zauważyć że dla $k=0$ też mamy rozwiązanie (1)

$$\Rightarrow y = xe^{1+kx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązać równanie $y'+y+y^2\sin x=0$

To równanie jest przykładem równanie Bernouillego

$$\frac{dy}{dx}=b_0(x)y+b_1(x)y^n \qquad n-\{0\}.$$

Aby rozwiązać go, korzystanie z podstawienia

$$z=y^{1-n}$$

Więc, mamy że dla nas $n=2$, czyli $z=y^{-1}$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y^2}\left(-y-y^2\sin x\right)=\frac{1}{y}+\sin x$$

$$=z+\sin x.$$

Równanie

$$\frac{dz}{dx}=z+\sin x \qquad (1)$$

to równanie liniowe, czyli równanie typu

$$\frac{dz}{dx}=a_0(x)z+a_1(x).$$

a) Aby rozwiązać to równanie trzeba najpierw część

$$\frac{dz}{dx} = d_0(x) z$$

W naszym przypadku, to

$$\frac{dz}{dx} = z \qquad (2)$$

To równanie o zmiennych rozdzielnych. Więc

$$\frac{dz}{z} = dx$$

Trzeba sprawdzić kiedy prawa strona zeruje się. i sprawdzić czy takie wartości są rozwiązania szczególnymi tego równania. W naszym przypadku widzimy że dla $z=0$ mianownik prawej strony się zeruje. Ponadto $z=0$ to rozwiązanie równania (2). oprócz tego

$$\int \frac{dz}{z} = \int dx \to \quad \ln|z| = \quad x + C_1 \qquad C \in \mathbb{R}$$

Skoro lewa strona się zeruje dla $z=0$ możemy założyć, że $C = \infty$ też. Więc, możemy wpisać $\ln|k| = C_1$ i

$$\boxed{z = k e^x, \quad k \in \mathbb{R}.}$$

To rozwiązanie równania (2). Widać, że skoro C_1 może być $-\infty \Rightarrow C = \ln|k| \Rightarrow k=0$ to rozwiązanie $z=0$ jest też w

b) Teraz, aby rozwiązać (1) jeszcze trzeba założyć, że $k=k(x)$ i korzystać z podstawienia

$$z = k(x)\, e^{x}$$

w równaniu (1). Więc,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dk}{dx}e^{x} + \cancel{ke^{x}} = \cancel{ke^{x}} + \sin x \Rightarrow \quad \frac{dk}{dx} = e^{-x}\sin x .$$

To równanie można rozwiązać dwa razy po częściach

$$\frac{dk}{dx} = e^{-x}\sin x \to \quad k = \int \overbrace{e^{-x}}^{dv} \underbrace{\sin x}_{u}\, dx = -e^{-x}\sin x + \int \overbrace{e^{-x}}^{dv} \underbrace{\cos x}_{u}\, dx$$

$$= -e^{-x}\sin x + (-e^{-x}\cos x) - \underbrace{\int e^{-x}\sin x\, dx}_{k}$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}\, e^{-x}(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$\Rightarrow z = k \cdot e^{x} = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + C_1 e^{x} . \qquad (z = y^{-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{C_1 e^{x} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}}$$

Druga metoda, aby obliczyć

$$\int e^{-x}\sin x,$$

korzysta z liczb zespolonych: $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$\int e^{-x}\sin x = \int e^{-x}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,dx = \int\left[\frac{e^{(i-1)x}}{2i} - \frac{e^{-(i+1)x}}{2i}\right]dx$$

$$= \frac{e^{(i-1)x}}{(i-1)2i} + \frac{e^{-(i+1)x}}{2(i+1)i} = \frac{e^{-x}}{2i}\left[\frac{e^{ix}}{i-1} + \frac{e^{-ix}}{i+1}\right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{2i}\left[\frac{ie^{ix}+ie^{-ix}+e^{ix}-e^{-ix}}{i^2-1^2}\right] =$$

$$= -\frac{e^{x}}{2}\left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right] = -\frac{e^{x}}{2}(\cos x+\sin x)$$

UWAGA: Równanie liniowe jednorodne

$$\frac{dy}{dx} = b_0(x)y$$ też można rozwiązać

bezpośrednio, wystarczy zauważyć, że jego rozwiązanie ogólne to

$$y = k\exp\left(\int b_0(x)\,dx\right) \quad \text{dla } k\in\mathbb{R}$$

W naszym przypadku

$$y = k\exp\left(\int dx\right) = \underline{ke^{x}}, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Rozwiązać równanie

$$t\frac{dx}{dt} - 4x - t^2\sqrt{x} = 0 \qquad x = u^2 \qquad (\text{Bernoulli } n = 1/2)$$

$$t\,2u\frac{du}{dt} - 4u^2 - t^2 u = 0 \to$$

$$u\left(2t\frac{du}{dt} - 4u - t^2\right) = 0 \quad \begin{cases} u = 0 & \text{to rozwiązanie} \\ u \neq 0 & \end{cases}$$

$$2t\frac{du}{dt} - 4u - t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2u}{t} + \frac{t}{2}$$ To równanie liniowe

Część jednorodna liniowa

$$\frac{du_J}{dt} = \frac{2u_J}{t}$$

a) $\frac{du_J}{u_J} = \frac{2dt}{t} \Rightarrow \ln|u_J| = 2\ln|t| + C$

$\Rightarrow u_J = \pm K t^2 \quad K \neq 0.$

Natomiast, widać, że to też rozwiązanie dla $K=0$:

$$u_J = Kt^2 \qquad K \in \mathbb{R}.$$

$k \in \mathbb{R}$

metoda b)

$$\frac{du_J}{dt} = \frac{2u_J}{t} \Rightarrow u_J = k\exp\left(\int \frac{2}{t}\,dt\right)$$

$$u_J = k\,t^2$$

Rozwiązanie równanie liniowe

$$\frac{du}{dt} = \frac{2u}{t} + \frac{t}{2} \qquad u = K(t)\cdot t^2$$

$$\frac{dK}{dt}t^2 + \cancel{K\,2t} = \cancel{\frac{2Kt^2}{t}} + \frac{t}{2} \rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2t} \Rightarrow K = \ln\sqrt{|t|} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad u = \left(\ln\sqrt{|t|} + C_1\right)t^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \left[\ln\sqrt{|t|} + C_1\right]^2 t^4. \\ x = 0. \end{cases}$$

Rozwiązać równanie:

$$3xy^2y' = 2y^3 + x^3$$

funkcja jednorodna

$$\Rightarrow y' = \frac{2y^3}{3xy^2} + \frac{x^3}{3xy^2} \Rightarrow \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{3y^2} \qquad u = \frac{y}{x}$$

$$y' = u'x + u = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3u^2} \Rightarrow xu' = -\frac{1}{3}u + \frac{1}{3u^2} = \frac{1-u^3}{3u^2}$$

$$\frac{3u^2\,du}{1-u^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

[u = 1 to rozwiązanie które zgubiła się gdy podzieliliśmy przez 0.]

$$\ln|1-u^3| = -\ln x + C_1$$

$$1 - u^3 = \pm e^{-\ln x + C_1} = k\frac{1}{x} \qquad k \neq 0$$

$$u^3 = 1 - \frac{k}{x} \Rightarrow y^3 = \left(1 - \frac{k}{x}\right)x^3 \Rightarrow \begin{cases} y = x\left(1 - \frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \\ y = x \Leftarrow u = 1 \end{cases}$$