Rozwiązać zagadnienie początkowe

(1) $$y'\cos x - y\sin x = 2x \qquad y(0)=0$$

To równanie liniowe pierwszego rzędu. Aby rozwiązać takie równanie, trzeba najpierw rozwiązać część jednorodną tego równania, czyli

(2) $$y' = y\,\frac{\sin x}{\cos x}$$

gdzie nie pojawia się termin $2x$ (który nie ma y) równania (1).

Równanie (2) to równanie o rozdzielnych zmiennych. Więc, aby rozwiązać, trzeba wprowadzić (2) do postaci gdzie mamy tylko y po jednej stronie i x po drugiej, np.

$$\frac{dy}{dx} = y\,\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

To ostatni wyrażenie nie jest dobrze zdefiniowane dla $y=0$. Trzeba sprawdzić, czy $y=0$ to rozwiązanie równania (2). Inaczej, można zgubić takie rozwiązanie, bo potem chyba nie pojawia się albo trudno znaleźć.

Właśnie $y=0$. To rozwiązanie szczególne równanie (1). Teraz, spróbujemy znaleźć ogólne rozwiązanie (2).

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \Rightarrow \underbrace{\ln|y| = -\ln|\cos x| + C_1}_{(C)}.$$

Gdzie C_1 to może być albo liczbą rzeczywistą albo $\{-\infty\}$. To ostatnie założyć aby zagwarantować, że równość (C) spełnia się gdy $y=0 \Rightarrow \ln|y| = -\infty$ i wtedy

$$\ln|y| = -\infty = -\ln|\cos x| + (-\infty) = -\infty.$$

Tutaj, korzystamy z faktu, że $\lambda - \infty = -\infty$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Skoro $C_1 \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, możemy napisać

$$C_1 = \ln|K|, \quad \text{gdy } K \in \mathbb{R}.$$

Dla $K=0$, to $C_1 = -\infty$. Z tego

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|K| = \ln\left|\frac{K}{\cos x}\right| \qquad K \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Dokładnie z tego wynika, że

$$y = \pm \frac{K}{\cos x} \qquad K \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

to zbiór rozwiązań równanie (1). Czyli możemy napisać

$$y = \frac{K_2}{\cos x}, \quad K_2 \in \mathbb{R}.$$

Też można rozwiązać (2) bezpośrednio.

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x)y \Rightarrow y = k\exp\left(\int a_0(x)dx\right),\ k \in \mathbb{R}.$$

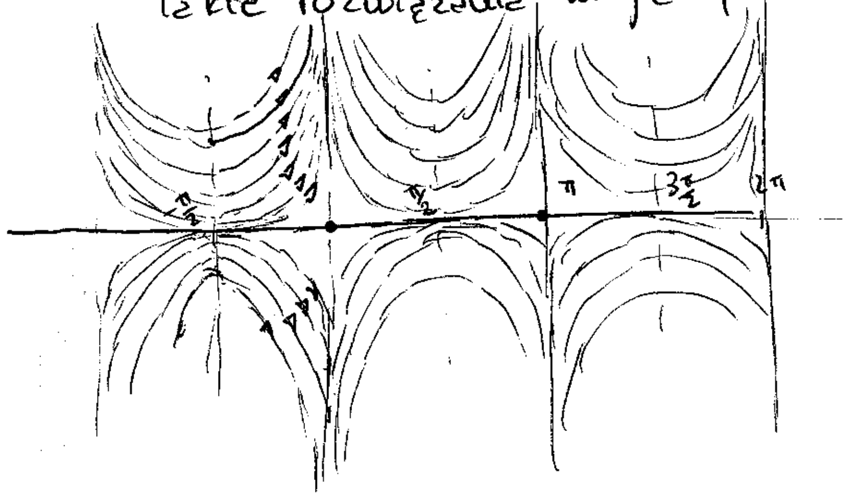
Dla nas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}y \Rightarrow y = k\exp\left(\int \frac{\sin x}{\cos x}dx\right),\ k \in \mathbb{R}.$$

Więc,

$$y = k\exp\left(\ln|\cos x|\right) = \frac{k}{|\cos x|} \quad \text{dla } k \in \mathbb{R}.$$

Takie rozwiązania mają postać:



Każde rozwiązanie w $[-\frac{\pi}{2}+T, \frac{\pi}{2}+T]$ dla $T = k_0\pi$ i $k_0 \in \mathbb{Z}$ można napisać po prostu

(3) $$y = \frac{k}{\cos x} \quad \text{dla } k \in \mathbb{R}$$

To dlatego można usunąć wartość bezwzględną.

Teraz, aby rozwiązać $y'\cos x - y\sin x = 2x$, zakładamy w (3), że $k = k(x)$ i zastąpimy to w (1). Więc,

$$\text{dla } y = \frac{k(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx}\frac{1}{\cos x} + \cancel{\frac{\sin x}{\cos^2 x}k} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{2x}{\cos x} + \cancel{\frac{k}{\cos^2 x}\sin x} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dk}{dx} = \frac{2x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dk}{dx} = 2x \Rightarrow k = x^2 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\lambda}{\cos 0} = \lambda$$

Rozwiązanie ogólne: $y = (x^2 + \lambda)/\cos x$ i

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{\cos x}$$ Rozwiązanie względnie początkowe.

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

(1) $$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$$

Na początku, widać, że to równanie tylko jest dobrze zdefiniowane dla $|y/x| \geq 1$ i $x \neq 0$.
To równanie jednorodne. Właśnie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} \equiv F(x,y)$$

i

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \sqrt{\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)^2 - 1} = \frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = F(x,y).$$

i z tego wynika, że (1) jest równaniem jednorodnym.
Aby rozwiązać, trzeba korzystać z podstawienia

$$y(x) = u(x) \cdot x.$$

Wówczas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u = u + \sqrt{u^2 - 1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{u^2 - 1}$$

To równanie o rozdzielonych zmiennych, więc żeby rozwiązać to, trzeba wprowadzić do postaci

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{dx}{x}$$

Widać, że prawa strona nie jest dobrze zdefiniowana dla $u=\pm 1$. Musimy sprawdzić, czy to wprowadzi do rozwiązań

$$u=\pm 1 \Rightarrow y=\pm x \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx}=\pm 1 \\ F(x,y)=\pm 1+\sqrt{1-1}=\pm 1 \end{cases}$$

Wówczas, $y=\pm x$ są rozwiązaniami szczególnymi równania (1).

Oprócz tego, mamy

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

podstawienie $u=\pm \operatorname{ch} v=\pm\frac{e^v+e^{-v}}{2}$ (3) skoro $\operatorname{ch} v \geq 1 \begin{cases} + & u\geq 1 \\ - & u\leq -1 \end{cases}$

$du=\pm \operatorname{sh} v\, dv$

$v\in[0,+\infty) \Rightarrow \operatorname{sh} v\geq 0$.

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{sh} v\, dv}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v-1}}=\int \frac{\cancel{\operatorname{sh} v}\, dv}{\cancel{\operatorname{sh} v}}=\int dv=v.$$

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C_1 \qquad C_1\in\mathbb{R}$$

i

$$v=\ln|x|+C_1 \Rightarrow \pm\operatorname{arc\,ch} u=\ln|x|+C_1$$

$$\Rightarrow u=\pm\operatorname{ch}(\ln|x|+C_1) \Rightarrow y=\pm\operatorname{ch}(\ln|x|+C_1)\,x$$

Widać, że dla każdej $C_1\in\mathbb{R}$, $|y|\geq|x|$. Widać, że nie pojawią się to rozwiązania $\boxed{y=\pm x}$. Korzystać z (3) możemy też wypisać

$$y=\pm\frac{e^{\ln|x|+C_1}+e^{-\ln|x|-C}}{2}\,x=\pm\frac{|x|e^{c}+\frac{1}{|x|e^{c}}}{2}\,x=\pm\frac{x^2e^{2c}+1}{2|x|e^{c}}\,x.$$

Rozwiązać równanie: $(2x-y^2)y'=2y$

Na początku widać, że to równanie nie jest ani liniowe, ani jednorodne. Można wprowadzić zmianę postaci do

$$(2x-y^2)\frac{dy}{dx}=2y \rightarrow \frac{(2x-y^2)}{2y}=\frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}=+\frac{x}{y}-\frac{1}{2}y$$

To równanie liniowe. Natomiast, trzeba zauważyć, że skoro pierwotne równanie to dy/dx i teraz mamy $\frac{dx}{dy}$, to drugie równanie nie jest dobrze zdefiniowane kiedy $dy/dx=0$. Więc, trzeba sprawdzić osobno rozwiązania $dy/dx=0$, czyli $y=c\in\mathbb{R}$. Widać, że $y=0$ to jedyne rozwiązanie tego typu.

Teraz można rozwiązać dalej równanie liniowe

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-\frac{1}{2}y.$$

$$x_G = x_S + k\,x_J^{(s)}$$

$$x_S=-\frac{1}{2}y^2 \qquad x=y$$

Równanie jednorodne

$$\frac{dx_J}{x_J}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x_J| + C_1 \quad C_1\in(-\infty,\infty)\cup\{-\infty\}.$$

$$\Rightarrow \cancel{y_J=Kx} \quad x_J=Ky \Rightarrow \quad \frac{dK}{dy}y+K=K-\frac{1}{2}y \rightarrow \frac{dK}{dy}=-\frac{1}{2}$$

$$K=-\frac{y}{2}+C_0,\ C_0\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x=\left(-\frac{y}{2}+C_0\right)y$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y-1}{2x-y-1}\right)^2.$$

Podstawienie

$$x = \xi + 1 \qquad y = \eta + 1$$

daje

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{\eta}{2\xi-\eta}\right)^2. \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(\xi,\eta) = \left(\frac{\eta}{2\xi-\eta}\right)^2 \\ F(\lambda\xi,\lambda\eta) = F(\xi,\eta), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

To równanie jednorodne, więc korzystamy z podstawienia

$$\eta = u\xi$$

Więc,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\xi}{d\xi}u + \xi\frac{du}{d\xi} = \left(\frac{u\xi}{2\xi-u\xi}\right)^2 = \left(\frac{u}{2-u}\right)^2$$

i

$$\xi\frac{du}{d\xi} = -u + \frac{u^2}{(2-u)^2} = u\left(\frac{-(2-u)^2+u}{(2-u)^2}\right) = u\,\frac{-u^2+5u-4}{(2-u)^2}.$$

To równanie w rozdzielonych zmiennych,

$$\xi\frac{du}{d\xi} = \frac{u(u-1)(4-u)}{(2-u)^2}$$

$$\int\frac{d\xi}{\xi} = \int\frac{(2-u)^2}{u(u-1)(4-u)}\,du\,.$$

$$\frac{(2-u)^2}{u(u-1)(4-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{4-u} = \frac{A(u-1)(4-u)+Bu(4-u)+Cu(u-1)}{u(u-1)(4-u)}$$

$$u=4 \Rightarrow \quad 4 = C\cdot 12 \rightarrow C = 1/3$$
$$u=0 \Rightarrow \quad 4 = -4A \rightarrow A = -1$$
$$u=1 \Rightarrow \quad 1 = 3B \rightarrow B = 1/3$$

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{(2-u)^2}{u(u-1)(4-u)}\,du = \int \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{3(u-1)} + \frac{1}{3(4-u)}\right] du$$

$$\Rightarrow \ln|\xi|^3 = \ln\left|\frac{(u-1)}{u^3(4-u)}\right| + \ln|C| \qquad \underline{C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}}$$

$$\frac{(4-u)\,\xi^3 u^3 C}{(u-1)} = 1. \qquad \begin{cases} C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ C = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=4 \\ u=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \eta = 4\xi \\ \eta = \xi \end{array} \\ C = \pm\infty \Rightarrow u = 0 \qquad \eta = 0. \end{cases}$$

$$C \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \xi^3 u^3 C = \left(\frac{y-1}{x-1} - 1\right)\left(4 - \frac{y-1}{x-1}\right)^{-1} \\ (x-1)^3\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^3 C = (y-x)(4x-y-3)^{-1} \\ (y-1)^3 C = (y-x)(4x-y-3)^{-1}. \end{cases}$$

Wyrazić we współrzędnych biegunowych (ρ,φ) równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

opisując krzywą $y=y(x)$ zależnością postaci $\rho=\rho(\varphi)$

IX

Rownania jednorodne wyższego stopnia

Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x^2} \qquad (1)$$

Jeżeli zdefiniujemy

$$F(x,y) = y^2 + \frac{1}{x^2}$$

Widać, że

$$F(\lambda x, \lambda^{-1} y) = \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 x^2} = \frac{1}{\lambda^2} F(x,y)$$

Mówi się, że (1) jest równaniem jednorodnym stopnia -1. Ogólne równanie

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

mówi się stopnia k gdy

$$F(\lambda x, \lambda^k y) = \lambda^{k-1} F(x,y).$$

X

Żeby rozwiązać takie równanie trzeba korzystać z podstawienia
$$y = ux^k$$
Dla nas
$$y = ux^{-1}.$$
To wprowadzi równanie do postaci o rozdzielonych zmiennych.

$$y = ux^{-1} \to \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x^{-1} - \frac{u}{x^2}$$
$$y^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{u^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{u^2+1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}\frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} = \frac{u^2+1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u^2+u+1}{x} \Rightarrow \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{dx}{x}.$$

$u^2+u+1 > 0$, więc

$$\int \frac{du}{u^2+u+1} = \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2u}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \frac{1+2u}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{2}(\ln|x| + C_1')$$

$$1+2u = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln|x| + C_1')\right] \Rightarrow 2yx = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln|x| + C_1)\right] - 1.$$