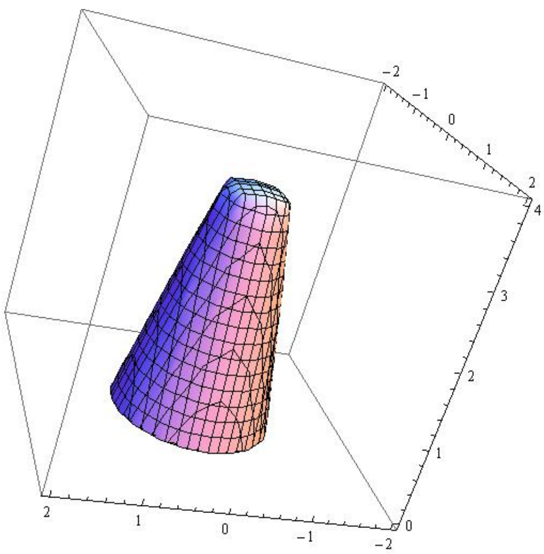
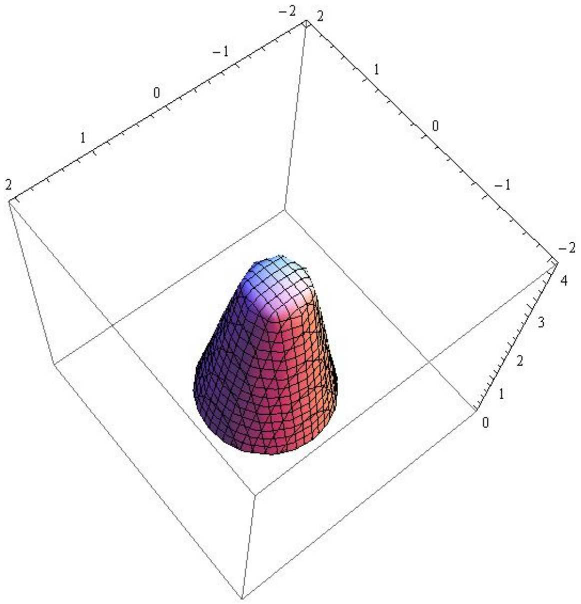
Analiza II

J. de Lucas

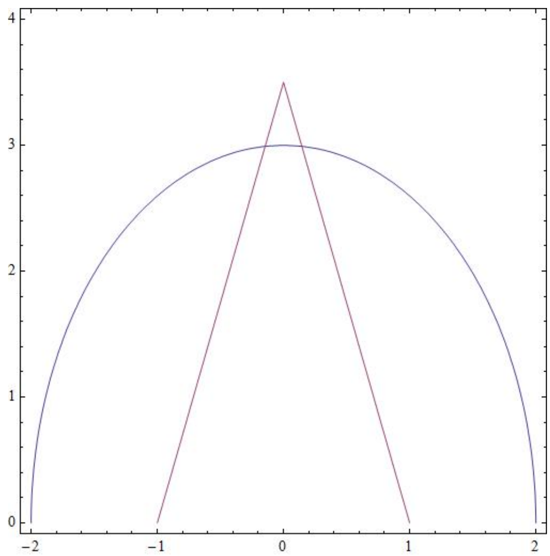
Zadanie 3. Znajdź objętość przecięcia stożka obrotowego o wysokości h i promieniu podstawy a (o podstawie w początku układu współrzędnych z wierzchołkiem w punkcie $(0,0,h)$) z elipsoidą o półosiach b, b, c, gdzie $b > a$ i $c < h$.

Rozwiązanie: Przykład przecięcia elipsoidy ze stożkiem wygląda następująco





Z boku, przecięcie wygląda w następujący sposób (tutaj dla $b = 2$, $r = 1$ i $h = 3.5$)



Przecięcie stożka z elipsoidą Ω ma symetrię walcową. W tych współrzędnych, równanie elipsoidy o półosiach $X : b, Y : b, Z : c$ to

$$\frac{r^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \tag{1}$$

i równanie stożka obrotowego o podstawie promieniu r i wysokości h to

$$0 \leqslant z \leqslant h\left(1 - \frac{r}{a}\right), \quad r \geqslant 0. \tag{2}$$

Elipsoida i stożek przecinają się w punktach gdzie (1) i (2) spełniają się. Dla przecięcia między stożkiem i elipsoidą, mamy że $\varphi \in [0, 2\pi]$ i $r \in [0, a]$. Natomiast, dla ustalonych φ i r, zmienna z jest ograniczona między 0 i pewną wartością $z_+(r, \varphi)$. Niech r_- będzie promieniem gdzie powierzchie elipsoidy i stożka sie przecinają. Można widzieć, że dla $r \leqslant r_-$ to

$$z \in \left[0, c\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}}\right].$$

Kiedy $r \geqslant r_-$, to

$$z \in \left[0, h\left(1 - \frac{r}{a}\right)\right].$$

Aby obliczyć r_-, zauważamy, że punkty przecięcia między stożkiem i elipsoidą, czyli (r_-, φ, z_-), to rozwiązania równań,

$$\frac{r^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad z = h\left(1 - \frac{r}{a}\right), \quad a \geqslant r \geqslant 0,$$

czyli punkty dla których $0 \leqslant r \leqslant a$ jest rozwiązaniem równania

$$h^2\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right). \tag{3}$$

To równanie drugiego stopnia. Mamy dwa rozwiązania

$$r_- = a\frac{b^2h^2 - bc\sqrt{a^2c^2 + (b^2 - a^2)h^2}}{a^2c^2 + b^2h^2}, \qquad r_+ = a\frac{b^2h^2 + cb\sqrt{a^2c^2 + (b^2 - a^2)h^2}}{a^2c^2 + b^2h^2}$$

Skoro $a < b$ i $c < h$ mamy dwie wartości r: $r_- < a$ i $r_+ > a$. Właśnie,

$$cb\sqrt{a^2c^2 + (b^2 - a^2)h^2} \geqslant cb\sqrt{a^2c^2} = c^2ba \geqslant c^2a^2$$

i

$$\frac{b^2h^2 - bc\sqrt{a^2c^2 + (b^2 - a^2)h^2}}{a^2c^2 + b^2h^2} \leqslant \frac{b^2h^2 - c^2a^2}{a^2c^2 + b^2h^2} \leqslant 1, \quad \frac{b^2h^2 + bc\sqrt{a^2c^2 + (b^2 - a^2)h^2}}{a^2c^2 + b^2h^2} \geqslant \frac{b^2h^2 + c^2a^2}{a^2c^2 + b^2h^2} = 1.$$

Interesuje nas tylko r_-, który jest mniejszy od a.

Więc, objętość to

$$V = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int\int_\Omega rdzdrd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_-}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{r^2}{b^2}}} rdzdrd\phi + \int_0^{2\pi}\int_{r_-}^{a}\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)} rdzdrd\phi$$

wówczas

$$V = 2\pi\left(\int_0^{r_-} cr\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}}dr + h\int_{r_-}^a\left(1 - \frac{r}{a}\right)rdr\right)$$

i

$$V = 2\pi\left(\frac{cb^2}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{r_-^2}{b^2}\right)^{3/2}\right] + h\left[\frac{a^2}{6} - \frac{r_-^2}{2} + \frac{r_-^3}{3a}\right]\right).$$

Z (3) wynika

$$V = 2\pi\left(\frac{1}{3}\left[cb^2 - \frac{b^2h^3}{c^2}\left(1 - \frac{r_-}{a}\right)^3\right] + h\left[\frac{a^2}{6} - \frac{r_-^2}{2} + \frac{r_-^3}{3a}\right]\right).$$

Byłoby rozsądnie sprawdzić, czy taki wynik ma sens. Wszystkie wyrażenia mają jednostki objętości, więc, to jest ok. Ponadto, widać, że dla $h \to c$ (przecięcie elipsoidy ze stożkiem to stożek) mamy $r_- = 0$ i

$$V = \frac{\pi}{3}ca^2,$$

czyli znana objętość stożka. Wszystko gra :).