ANALIZA I

24 listopada 2014

Semestr zimowy

Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Zadanie 1. Udowodnij przez indukcję, że

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$$a_0 > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{6}{2a_n + 1}, \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Zadanie 3. Oblicz granice:

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5 + n^2 + \sin(n)}$,
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right)$,
- $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$,
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^7+n+2}{n^7+6n+1}\right)^{n^6}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że

$$d(x, y) = (|x| - |y|) + |\mathrm{sgn}(x) - \mathrm{sgn}(y)|$$

określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wynaczyć kule o środek 4 i promień 3 i 5.

Zadanie 5. Za pomocą definicji Cauchy'ego i/lub Heini'ego ustal czy istnieje granica

$$\lim_{x\to 1} f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}, \\ \sqrt{x+3}, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$